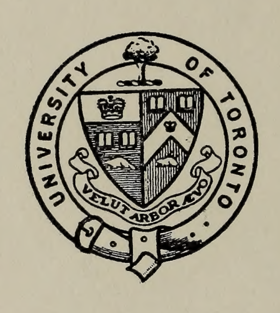
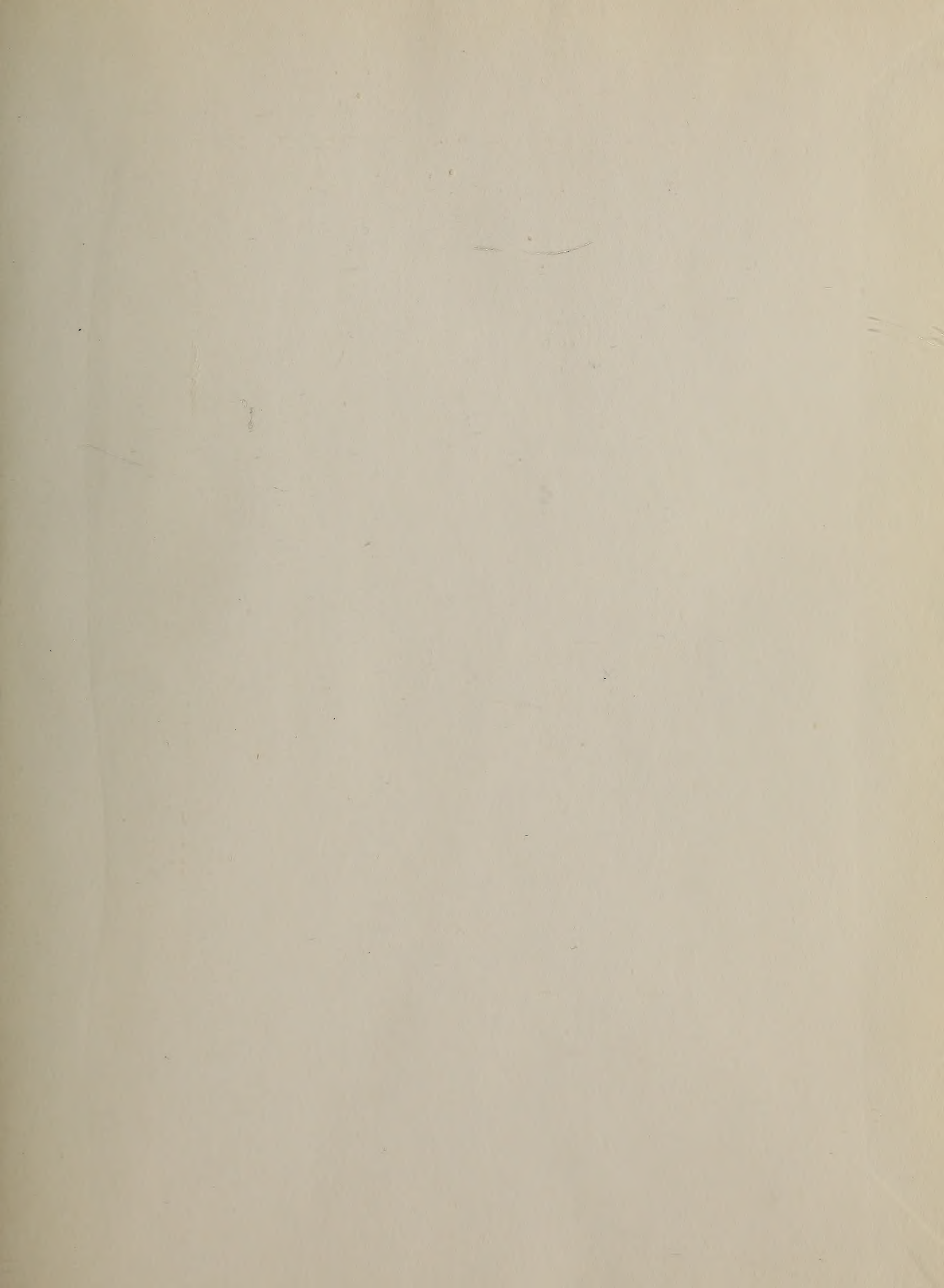
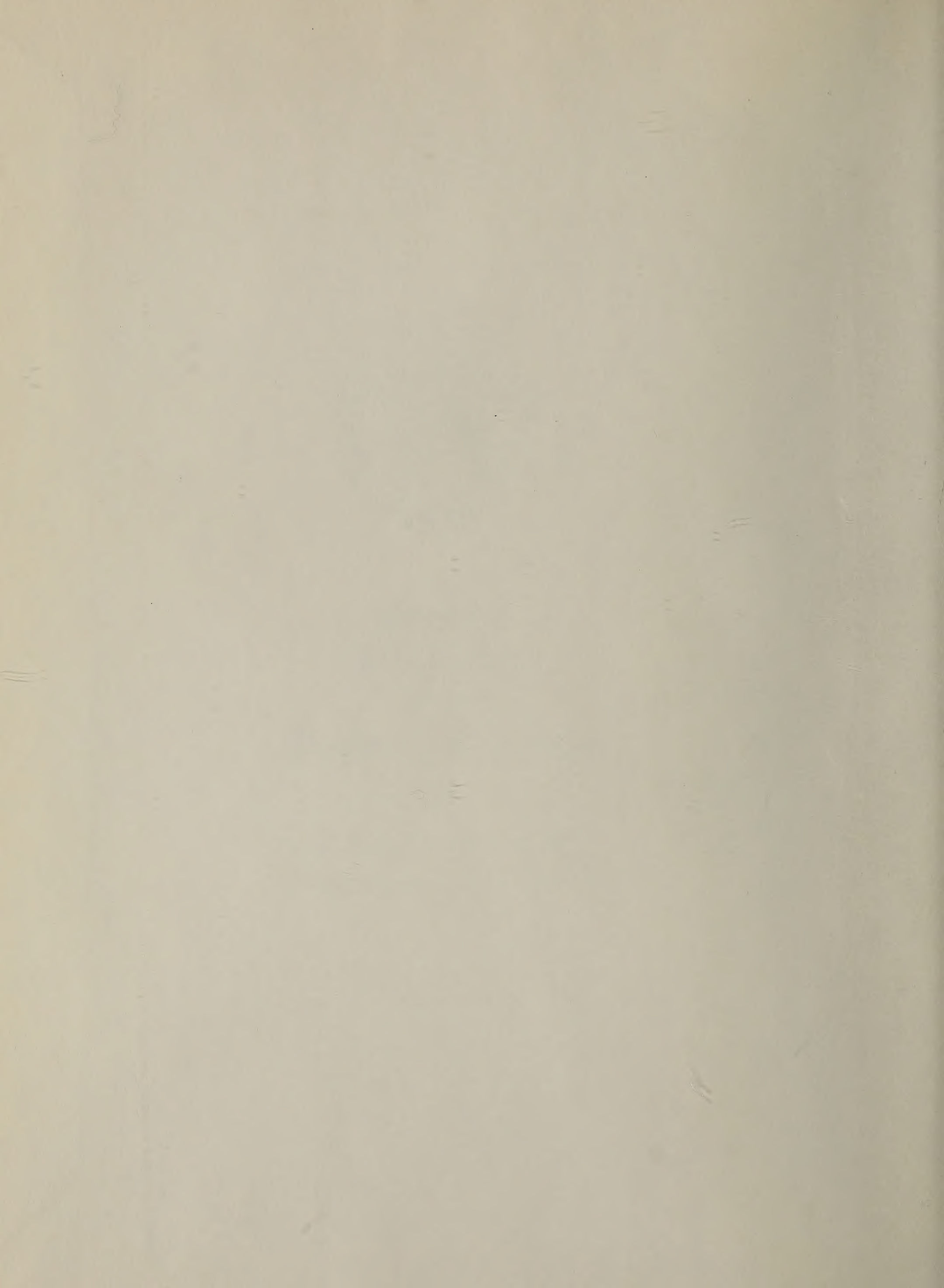

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01213496 1

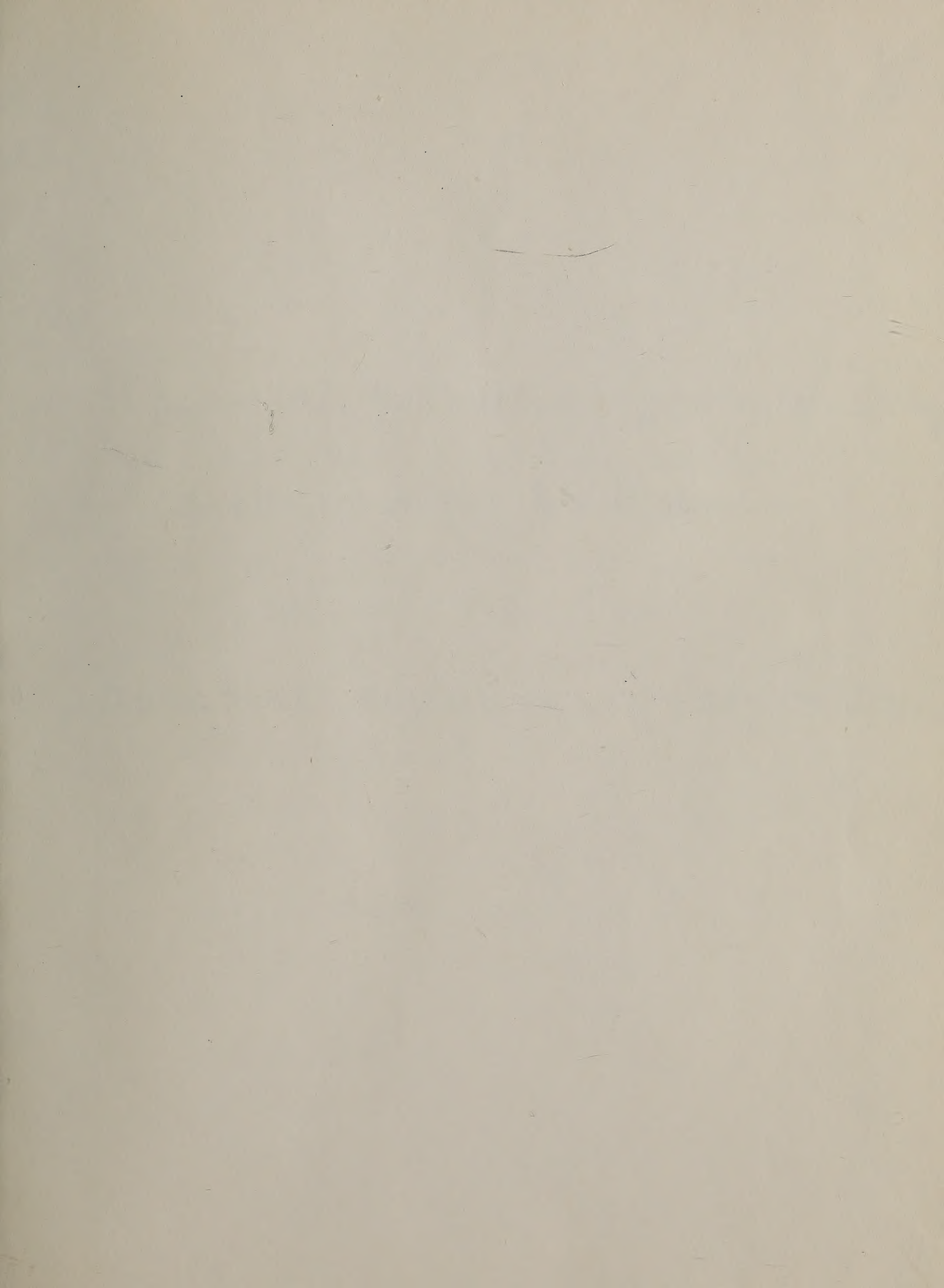


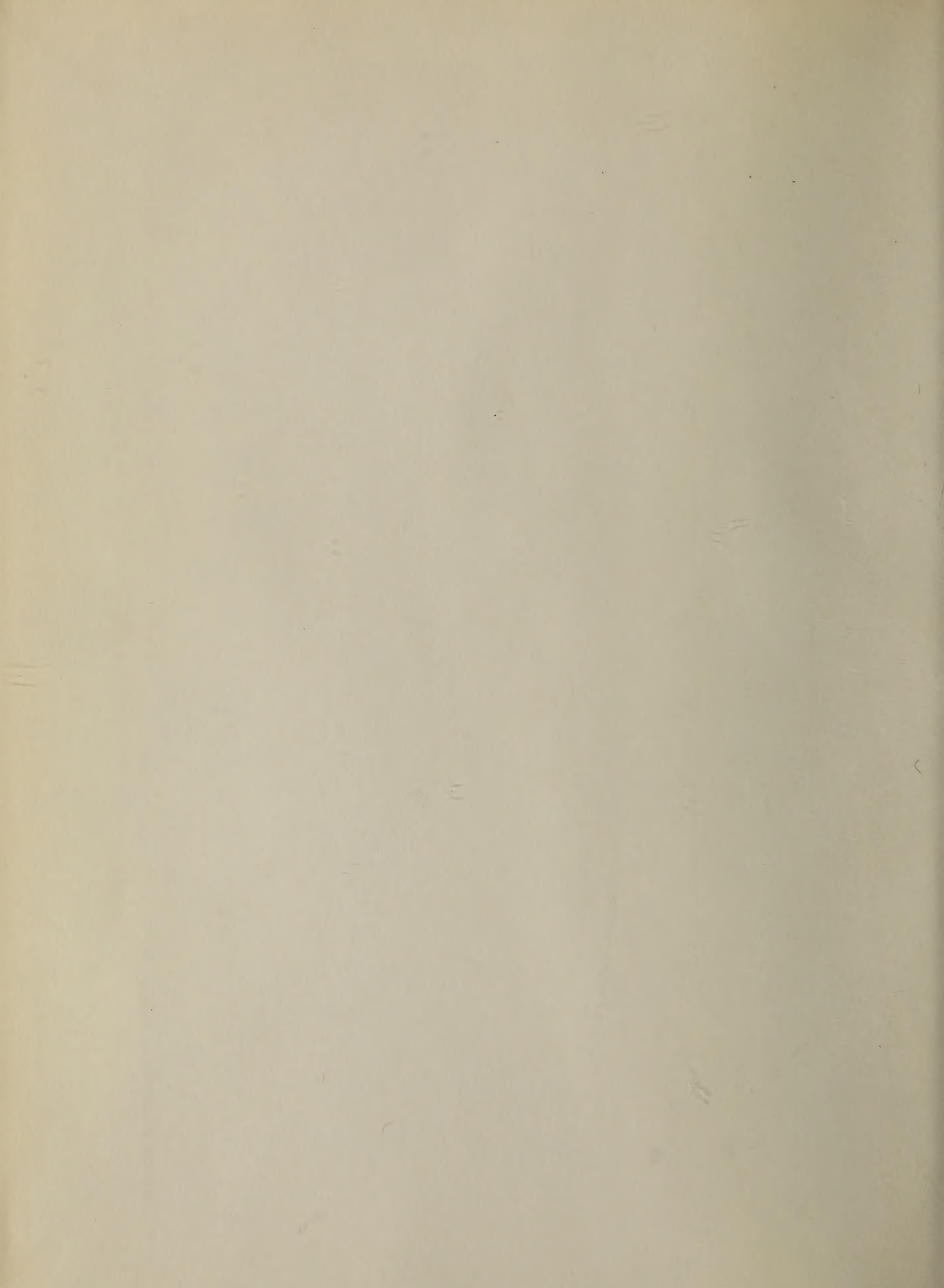
Presented to
The Library
of the
University of Toronto
by

The Estate of the late
Professor J. C. Fields







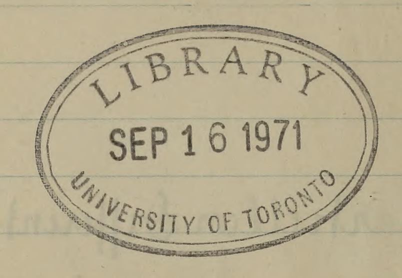


(43)

I

Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

(Nach einer Vorlesung von Prof. Johannes Knoblauch.)


LIBRARY
SEP 16 1971
UNIVERSITY OF TORONTO

QA
374
K56

Inhaltsverzeichnis

Erster Teil

Die partiellen Differentialgl'en 1. Ordnung

Zweiter Teil

Die partiellen Differentialgl'en 2. Ordnung

I

Capitel 1

Aus der Gleichung

$$z = g(x, \alpha)$$

welche eine Functionale Beziehung zwischen der abhängigen Variabeln z einerseits, der unabhängigen Variabeln x und einem veränderlichen Parameter α andererseits darstellt, sowie aus der durch Differentiation nach x folgender Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = g_1(x, \alpha)$$

ergiebt sich durch Elimination von α die gewöhnliche Diff. gleichung

$$F\left(z, \frac{dz}{dx}\right) = 0;$$

umgekehrt ergiebt die Integration der letzteren ein Integral, welches eine willkürliche Constante enthält.

Gehen wir von einer Function zweier unabhängiger Variabeln aus, die ausser letzteren noch zwei variable Parameter enthält

$$1. \qquad z = g(x, y, \alpha, \beta)$$

bezeichnen ferner mit Euler

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = q$$

und setzen

$$2. \qquad p = g_1(x, y, \alpha, \beta) \qquad q = g_2(x, y, \alpha, \beta)$$

so können α und β aus (2) berechnet und die für sie gefundenen Ausdrucke in (1) eingesetzt werden. Wir erhalten auf diese Weise die partielle Diff. gleichung erster Ordnung

$$3. \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

Sei z. B.

$$z = \alpha + \beta x + m\beta y$$

wo m gegeben, α, β willkürliche Constanten sind. Hier ist

$$p = \beta \qquad q = m\beta$$

und die partielle Diff. gleichung lautet also

$$q = m p$$

oder

$$\frac{\partial z}{\partial y} = m \frac{\partial z}{\partial x}$$

Die Parameter α, β können auch als Functionen der unabhängigen Variabeln x, y angenommen werden, wenn nur die Gleichungen (1), (2) unverändert bleiben;

alsdann bleibt auch (3.) ungeändert.
Bei dieser Annahme ist

$$p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$q = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

oder

$$4.\quad \left\{ \begin{array}{l} p = g_1(x, y, \alpha, \beta) + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} \\ q = g_2(x, y, \alpha, \beta) + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y} \end{array} \right.$$

Damit (4.) und (2.) übereinstimmen, muss

$$4^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

sein, und sind diese Gleichungen erfüllt, so folgt aus (1.) und (4.) dieselbe Diff. gleichung (3.) wie vorher.
Sollen in (4^*) $\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial g}{\partial \beta}$ nicht verschwinden, so ist das Verschwinden der Functional-determinante

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

oder kurz

$$4^{**} \quad \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} = 0$$

erforderlich, es muss also zwischen α, β eine Beziehung mit von x, y unabhängigen

Coefficienten stattfinden,

$$G(\alpha, \beta) = 0$$

oder

5.) $$\beta = \varphi(\alpha)$$

Es ist wichtig, dass für φ eine beliebige Function gewählt werden kann. In der That sind für jedes φ die Gleichungen

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

mit (4^{**}) gleichbedeutend.

Wir erkennen also schon hier das Auftreten willkürlicher Functionen in den Integralen partieller Diff. gleichungen.

Aus (4^{*}) folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial g}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial g}{\partial \beta} d\beta = 0$$

eine Gleichung, welche, wegen $d\beta = \varphi'(\alpha) d\alpha$ in die Form

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial g}{\partial \beta} \varphi'(\alpha) d\alpha = 0$$

oder

6. $$\frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \varphi'(\alpha) = 0$$

gesetzt, zusammen mit (5.) die Bedingung

dafür ausdrückt, dass die Gleichungen (2.) ungeändert bleiben, falls α, β als Functionen von x, y angenommen werden.
Vorausgesetzt ist hierbei, dass $\frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \beta}$ nicht verschwinden.
Ist gleichzeitig

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 \ , \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0$$

in (4^x), so kann man aus (4^x) α und β als Functionen von x und y berechnen, wonach aus (1.) z als Function von x und y allein erhalten wird.
Ist die partielle Diff. gleichung (3.), $F=0$, vorgelegt, so wird die ihr genügende Function $z = g(x, y, \alpha, \beta)$ ein „vollständiges" Integral genannt, weil sie ebensoviele Parameter enthält, wie die Anzahl der auftretenden Differentialquotienten beträgt.
Ein Integral, welches durch die gleichzeitigen Gleichungen

$$z = g(x, y, \alpha, \varphi(\alpha))$$
$$0 = \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(\alpha)$$

erklärt wird, heisst ein „allgemeines" Integral.

Endlich definieren die drei Gleichungen

$$z = \varphi(x, y, \alpha, \beta) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0$$

ein singuläres" Integral der vorgelegten Diff. gleichung. Dieses enthält also nicht willkürliches mehr.

Das Integral

$$z = \alpha + \beta x + \beta m y$$

der (S. 2) aufgestellten Diff. gleichung

$$q = m p$$

ist hiernach ein vollständiges.

Setzen wir mit Hülfe einer beliebigen Functi

$$\beta = \varphi(\alpha)$$

so folgt das allgemeine Integral aus

$$z = \alpha + (x + my)\varphi(\alpha)$$

$$0 = 1 + (x + my)\varphi'(\alpha)$$

und die Gleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 1$ zeigt, dass ein singulä Integral nicht existiert.

Das allgemeine Integral lässt sich einfac schreiben. Weil nämlich $\varphi'(\alpha) = -\frac{1}{x+my}$ und φ also auch φ' eine willkürliche Function, so kann α als eine willkürliche Function vo $\frac{1}{x+my}$ oder von $x + my$ aufgefasst werden

$$\alpha = \psi(x+my);$$

es folgt dann

$$z = \chi(x+my)$$

als allgemeines Integral der Diff. gleichung

$$q = mp.$$

Die bisherigen Ergebnisse lassen eine geometrische Deutung zu. Die Tangentialebene der Fläche $z = g(x,y)$ hat für laufende x', y', z' die Gleichung

$$p(x'-x) + q(y'-y) - (z'-z) = 0,$$

die Richtungscosinus der Normale sind

$$-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

woraus hervorgeht, dass jede Diff. gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

eine Eigenschaft der Normale oder der Tangentialebene definiert.

Das vollständige Integral liefert dann eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen mit dieser Eigenschaft.

Beim allgemeinen Integrale liefert die erste Gleichung $z = g(x, y, \alpha, \varphi(\alpha))$ eine einfach unendliche Flächenschar,

die Hinzunahme der zweiten eine Enveloppe erster Art dieser Schar, welche bei Änderung von α als geometrische Ort von Curven erscheint.

Das singuläre Integral stellt sich als Enveloppe zweiter Art, als geometrischer Ort von doppelt unendlich vielen Punkten dar. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern.

Aus der Clairaut'schen Diff. gleichung

$$z = px + f(p) \quad , \quad p = \frac{dz}{dx}$$

wo f eine gegebene Function bezeichnet, bildet man die verallgemeinerte Clairaut'sche Diff. gleichung

$$z = px + qy + f(p, q)$$

deren vollständiges Integral

$$z = \alpha x + \beta y + f(\alpha, \beta)$$

ist. Das allgemeine Integral ergiebt sich aus den Gleichungen

$$\begin{cases} z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + f(\alpha, \varphi(\alpha)) \\ 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\varphi'(\alpha) \end{cases}$$

das singuläre aus

$$\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + f(\alpha, \beta) \\ 0 = x + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ 0 = y + \frac{\partial f}{\partial \beta} \end{cases}$$

Das vollständige Integral stellt eine Ebene dar; die Enveloppe erster Art, das allgemeine Integral, erscheint als geometrischer Ort einer einfach unendlichen Schar von Geraden. Was für eine Fläche durch das singuläre Integral dargestellt wird, hängt von der Function f ab, welche auch die Gestalt der abwickelbaren Fläche des allgemeinen Integrales bestimmt. Setzen wir z. B.

$$f(\alpha, \beta) = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2}$$

a, b, c gegebene Constanten, so ergiebt sich die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

als singuläres Integral, d. h. als Enveloppe zweiter Art.

Es muss noch nachgewiesen werden, dass die drei angegebenen Arten von Integralen alle möglichen Fälle erschöpfen. Es sei vorgelegt die Diff. gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und es sei

$$z = h(x,y)$$

ein Integral, d.h. eine Function, welche mit ihren Ableitungen $p = h_1(x,y)$, $q = h_2(x,y)$ in $F=0$ eingesetzt, eine Identität liefert,

$$F(x, y, h(x,y), h_1(x,y), h_2(x,y)) = 0$$

Es wird behauptet, dass $z = h(x,y)$ in einer der drei Formen enthalten sein muss.
Sei nun

$$z = \varphi(x, y, \alpha, \beta)$$

ein Integral der Diff. gl. $F=0$, so haben wir gezeigt, dass diese als Folgerung der Gleichungen

$$z = \varphi \qquad p = \varphi_1 \qquad q = \varphi_2$$

angesehen werden kann. Die Annahme eines vollständigen Integrales kommt also darauf hinaus anzunehmen dass die Gleichung

$$F(x, y, \varphi, \varphi_1, \varphi_2) = 0$$

identisch stattfindet.
Im allgemeinen dürfen wir voraussetzen, dass die Gleichung $F=0$ nach z auflösbar ist

$$z = f(x, y, p, q).$$

Dann ist der Annahme nach identisch

$$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

$$g(x,y) = f\left(x, y, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

Hieraus würde $h = g$ folgen, wenn die Gleichungen

$$(a.) \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

stattfänden, da alsdann die rechten Seiten der letzten Gleichungen identisch würden. Die noch in g auftretenden α, β denken wir uns aus (a.) bestimmt, setzen also diese Gleichungen als Bestimmungsgleichungen für α und β an:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

und wegen (a):

$$(b.) \qquad \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

Werden also α, β wie angegeben gewählt, so sind sie entweder constant, und es wird

dann $h=q$ ein specieller Fall des vollständi[gen]
Integrales, oder α, β genügen den Gleichung[en]
(6.), so ist $h=q$ in dem allgemeinen oder in
dem singulären Integrale enthalten.

Capitel 2

Wir betrachten zunächst die linearen Diff. gleichungen erster Ordnung.
Wir haben gesehen, dass das allgemeine Integral der Diff. gleichung

$$q = mp$$

sich durch eine Function

$$z = \chi(x + my)$$

darstellen liess; es war also, obgleich die willkürliche Function φ nicht bestimmt war, eine Elimination beider Parameter möglich. Wir wollen jetzt allgemeiner annehmen, es sei

$$v = \varphi(u) \tag{7.}$$

ein gegebener Ansatz, wobei φ eine willkürliche Function von u, u und v gegebene Functionen von x, y, z sind. Die Frage ist, ob sich aus (7.) eine partielle Diff. gl. herleiten lässt. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p &= \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p\right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q &= \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q\right) \end{aligned} \tag{7.^{x}}$$

und es handelt sich darum, φ aus (7.), (7.^{x})

zu eliminieren. Die gesuchte partielle Diff. gl. erster Ordnung folgt ohne weiteres aus (7^x.) in der Form

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

oder, da die Glieder zweiten Grades sich fortheben

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} + p\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,y)} + q\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = 0$$

oder kurz

$$8. \qquad \mathfrak{L}p + \mathfrak{M}q = \mathfrak{N}$$

wo $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gegebene Functionen von x, y, z sind. Es werde nun (8.) als gegeben angenommen und gefragt, was man alsdann über die Beziehung $v = \varphi(u)$ aussagen könne.
Aus (7^x) bilden wir leicht mit Hülfe von (8):

$$\mathfrak{L}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(u)\left(\mathfrak{L}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Wenn jetzt (7.) ein Integral von (8.) ist, also mit (8.) gleichzeitig bestehen soll, so muss die Substitution der aus (7.) berechneten Grösse z in (8.) eine Identität ergeben. Eine solche wird sicher schon erhalten, wenn

$$9.)\quad \begin{aligned} L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+N\frac{\partial u}{\partial z}&=0\\ L\frac{\partial v}{\partial x}+M\frac{\partial v}{\partial y}+N\frac{\partial v}{\partial z}&=0\end{aligned}$$

gesetzt wird. Es ist nun wichtig, dass, wenn u und v als verschiedene Lösungen dieser Diff. gleichungen bestimmt werden und dann $v=\varphi(u)$ gesetzt wird, die Gleichung (8) thatsächlich befriedigt wird. Unter zwei "verschiedenen" Lösungen werden dabei solche verstanden, von denen nicht die eine eine blosse Function der anderen ist oder deren Functionaldeterminanten inbezug auf $x,y;\ y,z;\ z,x$ nicht zugleich verschwinden. Seien u,v zwei solche Lösungen von (9.), so bilden wir die Gleichungen (7^x) und erhalten aus (9.)

$$(Lp+Mq)\frac{\partial v}{\partial z}-N\frac{\partial v}{\partial z}=\varphi'(u)\left((Lp+Mq)\frac{\partial u}{\partial z}-N\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

oder

$$(Lp+Mq-N)\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

Wäre nun der zweite Factor $=0$, so bestände ausser der Gleichung $v=\varphi(u)$ noch eine andere Beziehung zwischen x,y,z; aus beiden könnte z eliminiert werden, und es würde sich so eine Relation zwischen den unabhängigen

variabeln x, y ergeben, was unmöglich ist.
Es ist also, wie behauptet wurde

$$Lp + Mq = N$$

Unsere Aufgabe, die Diff. gl. (8.) zu integrieren kommt also darauf hinaus, zwei verschiedene Lösungen der Diff. gl.

$$L\frac{\partial w}{\partial x} + M\frac{\partial w}{\partial y} + N\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (9.)$$

zu ermitteln. Die Integration einer belieb[igen] linearen Diff. gl. erster Ordnung ist damit auf die Integration einer homogenen zurück geführt.
Die Integration einer partiellen Diff. gl. de[r] Form (9.) steht im engsten Zusammenhange mit der Integration eines Systems gewöhnlicher Diff. gleichungen. Wir stellen die Untersuchung sofort für n+1 Variable[n]

$$x, x_1, x_2, \dots\dots x_n$$

an. Das vorgelegte System gewöhnlicher Diff. gleichungen sei

$$(S.)\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dx} = f_1(x, x_1 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dx} = f_n(x, x_1 \dots x_n) \end{cases}$$

Man sagt alsdann bekanntlich, die Gleichung

$$\omega(x, x_1 \cdots x_n) = C$$

wo C eine willkürliche Constante, sei ein Integral der Gleichungen jenes Systems, wenn auf Grund dieser Gleichungen

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n} dx_n$$

identisch $= 0$ ist.

Der Symmetrie wegen versehen wir, was immer möglich ist, die rechten Seiten der Gleichungen des Systemes mit einem gemeinsamen Nenner, setzen also

$$\frac{dx_\nu}{dx} = \frac{\mathfrak{X}_\nu}{\mathfrak{X}}, \qquad (\nu = 1, 2 \cdots n)$$

oder auch

$$dx = \lambda \mathfrak{X} \quad dx_1 = \lambda \mathfrak{X}_1 \quad \cdots \quad dx_n = \lambda \mathfrak{X}_n$$

und wir erhalten

$$d\omega = \lambda \left(\mathfrak{X} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \mathfrak{X}_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \mathfrak{X}_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right)$$

Da λ nicht verschwindet, so ist hiernach die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Function ω ein Integral des Systemes darstelle, das Bestehen der Gl.

$$(9^x) \qquad \mathfrak{X} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \mathfrak{X}_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \mathfrak{X}_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} = 0$$

Umgekehrt erhellt aus dieser Darstellung

dass man ein Integral von (9^x) finden kann, wenn man ein Integral des Systemes (S) ermittelt hat.
Eine partielle Diff. gl. wird überhaupt als gelöst angesehen, wenn ihre Zurückführung auf gewöhnliche Diff. gleichungen geleistet ist. Eine solche Zurückführung ist also für homogene lineare Diff. gleichungen erster Ordnung ohne weiteres möglich.
Kehren wir jetzt zu (9) zurück, setzen $n=2$ und bezeichnen die Grössen x, x_1, x_2 mit x, y, z ferner X, X_1, X_2 mit L, M, N, so können wir sagen: Um die Diff. gleichung (9.)

$$L\frac{\partial w}{\partial x} + M\frac{\partial w}{\partial y} + N\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

zu integrieren, setze man das System gewöhnlicher Diff. gleichungen

$$dx = \lambda L \quad dy = \lambda M \quad dz = \lambda N$$

oder auch

$$9^{xx} \qquad \frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}$$

an. Jede Lösung dieses Systemes, d.h. jede Function, welche gleich einer Constanten gesetzt, ein Integral dieser Gleichungen liefert kann für u und v (S. 13) gesetzt werden.

Es kommt jedoch darauf an, zwei in dem angegebenen Sinne verschiedene Lösungen zu finden, d.h., da die Anzahl der Gleichungen $=2$ ist, die beiden unabhängigen Integrale des Systemes zu ermitteln. Die Integralgleichungen seien bezeichnet mit

$$u(x,y,z) = \alpha \qquad v(x,y,z) = \beta,$$

so ist damit auch die Integration der homogenen linearen partiellen Diff. gl. (8.) insofern geleistet, als wir nur $v = \Phi(u)$ zu setzen brauchen, um das allgemeine Integral dieser Diff. gl. zu erhalten.

Die Aufstellung der Gleichung (9^{xx}) setzt voraus, dass keine der Functionen L, M, N verschwindet. Der Fall, wo letzteres eintritt, wird später behandelt werden. Zunächst noch einige Beispiele für die letzten Betrachtungen.

Es sollen diejenigen Flächen gefunden werden, deren sämtliche Tangentialebenen einer festen Geraden parallel sind. Die gegebene Gerade sei bestimmt durch die Gleichungen

$$x' = l z' + \lambda \qquad y' = m z' + \mu$$

oder

$$\frac{x-\lambda}{l} = \frac{y'-\mu}{m} = \frac{z'}{1};$$

die Richtungscosinus der Flächennormale welche auf dieser Geraden senkrecht stehen soll, sind proportional den Grössen $-p, -q, +1$. Die Orthogonalitätsbedingung lautet daher nach Umkehrung des Vorzeichens

$$lp + mq - 1 = 0;$$

dies ist die partielle Diff. gl. der gesuchten Flächenklasse.

Man hat also zu setzen

$$\frac{dx}{l} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{1}$$

woraus folgt

$$dx - l\,dz = 0 \quad , \quad dy - m\,dz = 0,$$

sodass

$$x - lz = \alpha \qquad y - mz = \beta$$

die beiden unabhängigen Integrale sind.

Es ist folglich

$$y - mz = \varphi(x - lz),$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet

die gesuchte Lösung der partiellen Diff.gl.
Um eine geometrische Deutung zu erlangen, beachten wir, dass im allgemeinen Falle die Integralgleichungen

$$u(x,y,z) = \alpha \qquad v(x,y,z) = \varphi(\alpha)$$

für ein bestimmtes α eine Curve darstellen und dass nach Elimination von α die sich ergebende Fläche $v = \varphi(u)$ als der geometrische Ort aller dieser Curven erscheint. In unserem Beispiele stellen die Gleichungen

$$u \equiv x - lz = \alpha \qquad v \equiv y - mz = \varphi(\alpha)$$

eine Schar von geraden Linien dar, welche offenbar der gegebenen Geraden parallel sind. Die gesuchte Fläche wird daher erzeugt durch die Bewegung einer Geraden, welche der gegebenen parallel bleibt: sie ist eine Cylinderfläche, deren Achse der gegebenen Geraden parallel ist.
Es sollen ferner diejenigen Flächen bestimmt werden, deren Tangentialebenen sämtlich durch einen festen Punkt des Raumes, z. B. durch den Anfangspunkt $(0,0,0)$ gehen.

Nach der Forderung der Aufgabe soll wie auch der Punkt (x, y, z) auf der Fläche gelegen sei seine Tangentialebene

$$p(x'-x)+q(y'-y)-(z'-z)=0$$

stets durch den Punkt $(0,0,0)$ gehen; folglich haben wir in

$$px+qy=z$$

die gesuchte Diff. gleichung. Hier ist $L=x$, $M=y$, $N=z$; das resultierende System gewöhnlicher Diff. gleichungen

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

hat die beiden verschiedenen Integrale

$$x=\alpha z \quad y=\beta z \quad \text{oder} \quad \frac{x}{z}=\alpha \quad \frac{y}{z}=\beta$$

Die Lösung der partiellen Diff. gleichung ist also

$$\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$$

Die Gleichungen

$$x=\alpha z \qquad y=\varphi(\alpha)\cdot z$$

stellen eine Schar von Geraden dar, welche durch den Punkt $x=y=z=0$ gehen. Die gesuchte Flächenklasse enthält demnach die allgemeinen Kegelflächen.

Was die Cylinderflächen anbelangt, so sind sie uns schon als das Integral $z = \chi(x+my)$ der Diff. gl. $q = mp$ begegnet. Diese lineare Diff. gl.

$$q - mp = 0$$

lässt sich nach den zuletzt entwickelten Methoden nicht behandeln, da die Function $R = 0$ ist und deshalb nicht als Divisor verwendet werden darf. Wenn im allgemeinen Falle in dem Systeme gewöhnlicher Diff.-gleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

durch welches das System (S) ersetzt werden kann, eine der Functionen X_ν, z. B. X, verschwindet, so hat man einfach zu setzen

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{X}{X_1}, \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2}{X_1}, \cdots\cdots \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n}{X_1}$$

und dieses System hat, da $X = 0$, das Integral $x = C$, während die übrigen, noch nicht integrierten Diff. gleichungen sich wieder in die Form

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

setzen lassen. Wir wollen nun der Symmetrie wegen auch den ersten Quotienten stehen lassen und dabei nur bewusst bleiben dass das System

$$\frac{dx}{0} = \frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ein constantes Integral $x = C$ besitzt.

Für die Diff. gl.

$$Lp + Mq = 0$$

ist also anzusetzen

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{0}$$

Der hieraus folgende Wert $z = \alpha$ ist in L und M einzusetzen und das Integral der resultierenden Diff. gleichung zwischen x und y zu bestimmen. Dieses sei

$$v(x, y) = \beta$$

so ist

$$v = \varphi(z)$$

(φ eine willkürliche Function) das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Diff. gl. In unserem Beispiele $q - mp = 0$ ist $L = -m$, $M = 1$ also

$$\frac{dx}{-m} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}$$

zu setzen. Die beiden Integrale dieses Systemes

$$z = \alpha \qquad x + my = \beta$$

ergeben die Lösung

$$z = \chi(x + my)$$

die in derselben Form (S. 7) erhalten wurde. Die Achse der durch diese Gleichung dargestellten Cylinderflächen wird bestimmt durch die Gleichungen

$$z' = 0, \quad x' + my' = 0$$

Um an einem ferneren Beispiele diesen Ausnahmefall zu studieren, wollen wir diejenigen Flächen bestimmen, deren Normalen eine feste Achse schneiden. Die gegebene Gerade werde als z-Achse angenommen,

$$x' = 0, \quad y' = 0$$

Die Normale wird durch die Gleichungen

$$x' - x + p(z' - z) = 0$$

$$y' - y + q(z' - z) = 0$$

bestimmt. Hieraus folgt leicht die Diff. gleichung der gesuchten Flächen

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$$

oder

$$p y - q x = 0$$

welcher das System gewöhnlicher Diff. gleichun[gen]

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

zuzuordnen ist. Die Integrale dieses System[s]

$$z = \alpha \,,\quad x^2 + y^2 = \beta$$

ergeben als Gleichung der zu bestimmenden Flächenschar

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

Jede Fläche dieser Schar erscheint infolge der Gleichungen

$$x^2 + y^2 = \beta \qquad z = \varphi(\beta)$$

als geometrischer Ort von Kreisen mit veränderlichem Radius, welche auf der z-Ach[se] senkrecht stehen; sie ist folglich eine Rotationsfläche.

Wir haben die Lösung $v = \varphi(u)$ als das allgem[eine] Integral der vorgelegten Diff. gl. bezeichnet. Wir haben diese Bezeichnung um so mehr zu rechtfertigen, als bei diesen linearen Gleichungen der Begriff des vollständigen Integrales ganz in den Hintergrund getreten i[st].

wenn also unter v und u dieselben Functionen wie bisher verstanden werden, wenn ferner die functionale Beziehung

$$G(x,y,z)=0$$

der Diff.gl.

$$Lp+Mq=N$$

genügt, so ist zu zeigen, dass die Beziehung $G=0$ stets in der Form $v=\varphi(u)$ bei passender Bestimmung der willkürlichen Function φ enthalten ist.

Zunächst ergiebt die Elimination von p und q aus

$$\frac{\partial G}{\partial x}+p\frac{\partial G}{\partial z}=0 \quad \Big| \cdot L$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}+q\frac{\partial G}{\partial z}=0 \quad \Big| \cdot M$$

dass G der Diff.gleichung

$$L\frac{\partial G}{\partial x}+M\frac{\partial G}{\partial y}+N\frac{\partial G}{\partial z}=0$$

genügt. Es seien jetzt

$$u\equiv F_1(x,y,z)=\alpha \qquad v\equiv F_2(x,y,z)=\beta$$

die Integrale des der vorgelegten partiellen Diff.gleichung zuzuordnenden Systemes gewöhnlicher Diff.gleichungen.

Aus ihnen können z. B. y und z als Functionen von x, u, v berechnet und in $G(x, y, z)$ substituiert werden, sodass identisch

$$G(x, y, z) = G_1(x, u, v)$$

wird. Unsere Behauptung ist offenbar bewiesen, wenn G_1 die Variable x explicite nicht enthält.

Aus der letzten Identität folgt:

$$\begin{array}{ll|l} \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} & & \cdot L \\ \frac{\partial G}{\partial y} = \quad\frac{\partial G_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} & & \cdot M \\ \frac{\partial G}{\partial z} = \quad\frac{\partial G_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial G_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} & & \cdot N \end{array}$$

und hieraus

$$L\frac{\partial G}{\partial x} + M\frac{\partial G}{\partial y} + N\frac{\partial G}{\partial z} = L\frac{\partial G_1}{\partial x}$$

da ja

$$L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$L\frac{\partial v}{\partial x} + M\frac{\partial v}{\partial y} + N\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

ist. Es ist daher

$$L\frac{\partial G_1}{\partial x} = 0$$

Wenn nun identisch $L = 0$ wäre, so hätten wir in der Diff. gleichung $Mq = N$ oder $M\frac{\partial z}{\partial y} = N$

nur scheinbar eine partielle Diff.gleichung, ein Fall, welchen wir ausschliessen können. Dagegen könnte unter gewissen Voraussetzungen über die Coefficienten der vorgelegten Diff. gleichung z als Function von x und y durch die Gleichung $L=0$ dargestellt werden. Schliessen wir auch diesen, nur unter besonderen Annahmen eintretenden Fall aus, so ist in der That, wie behauptet, $\frac{\partial G_1}{\partial x}=0$, d.h. G_1 eine Function von u, v allein,

$$G(x, y, z) = G_1(u, v)$$

Aus $G_1(u, v)=0$ folgt sofort $v=\varphi(u)$.

Hiermit ist folgendes bewiesen: Wenn man von gewissen singulären Fällen absieht, welche sich darauf beziehen, z als Function von x und y durch eine der Gleichungen $L=0$, $M=0$ zu definieren, und welche nur unter gewissen Voraussetzungen über die Coefficienten eintreten können, so ist jedes Integral der Diff. gl. (8) (S. 14) in der Form $v=\varphi(u)$ bei passender Wahl von φ darstellbar.

Die S. 27 angestellte Elimination von y

und z aus den Gleichungen $u = F_1(x, y, z)$ $v = F_2(x, y, z)$ ist nicht möglich, wenn F_1 und F_2 inbezug auf y, z nicht unabhängig sind, wenn also $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = 0$ ist. Dann muss aber $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)}$ von Null verschieden sein, und man hat dann in dieser Rechnung nur x mit y zu vertauschen. Unter Ausschliessung der Gleichung $M = 0$ ergiebt sich dann das analoge Resultat $\frac{\partial G_2}{\partial y} = 0$, $G(x, y, z) = G_2(u, v)$.
Die in dem allgemeinen Integrale $v = \varphi(u)$ auftretende willkürliche Function kann durch Aufstellung einer Nebenbedingung bestimmt werden. Doch macht diese Bestimmung im allgemeinen grosse Schwierigkeiten, und für Gleichungen der Form (8) ist sie einfach, wenn es sich um eine der folgenden Bedingungen handelt:

1) Eine Fläche der Classe $v = \varphi(u)$ soll so bestimmt werden, dass sie durch eine gegebene Curve geht;
2) sie soll so bestimmt werden, dass sie einer gegebenen Fläche umschrieben ist.

Im ersten Falle sei die Curve durch die

Gleichungen

$$F_1(x,y,z)=0 \quad F_2(x,y,z)=0$$

gegeben. Das Integral $v=\varphi(u)$ konnten wir auffassen als geometrischen Ort einer Curvenschar

$$u(x,y,z)=\alpha \qquad v(x,y,z)=\varphi(\alpha)$$

Diese Curven werden, wenigstens innerhalb eines gewissen Bereiches für α, von der gegebenen Curve geschnitten, da diese auf der Fläche liegen soll, als deren Ort jene Curvenschar definiert ist. Für gewisse Wertsysteme (x,y,z) welche den Durchschnittspunkten der gegebenen Curve mit den veränderlichen Curven entsprechen, müssen also die vorstehenden vier Gleichungen sämtlich erfüllt sein. Dazu ist eine Bedingungsgleichung erforderlich, die wir erhalten, wenn wir aus diesen Gleichungen x,y,z eliminieren; sie laute

$$F(\alpha,\varphi(\alpha))=0$$

Diese Gleichung führt zu einer wenn auch im allgemeinen nicht eindeutigen Bestimmung von φ.

Im zweiten Falle sei

$$F_1(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Längs einer gewissen Curve, in welcher die Fläche $v - \varphi(u) = 0$ der gegebenen umschrieben ist, müssen die Tangentialebenen beider zusammenfallen, d.h. es müssen längs dieser Curve in den Gleichungen

$$p_1(x'-x) + q_1(y'-y) - (z'-z) = 0$$

$$p(x'-x) + q(y'-y) - (z'-z) = 0,$$

wobei p_1, q_1 aus

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} p_1 = 0 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} q_1 = 0$$

zu bestimmen sind, die Wertsysteme p, p_1; q, q_1 paarweise übereinstimmen

$$p = p_1 \qquad q = q_1$$

Da die zu bestimmende Fläche in einer Classe enthalten ist, welche durch die Diff. gleichung

$$Lp + Mq = N$$

definirt ist, so ist die Curve aus den Gleichungen

$$Lp_1 + Mq_1 = N \quad , \quad F_1(x, y, z) = 0$$

zu bestimmen. Hiermit ist die Bestimmung von φ auf den ersten Fall zurückgeführt. Es ist hier die Stelle, eine Classe von partiellen Diff. gleichungen erster Ordnung zu erwähnen, welche durch eine gewisse Transformation auf ebensolche lineare Diff. gleichungen zurückgeführt werden kann. Der Typus dieser Classe ist

10. $$x f_1(p, q, px+qy-z) + y f_2(p, q, px+qy-z) = f_3(p, q, px+qy-z)$$

sodass z nur in der Verbindung $px+qy-z$ auftritt.

Die anzuwendende Transformation ist

10*. $$px+qy-z = w; \qquad \text{(vgl. S. ff.)}$$

sie wird gewöhnlich nach Legendre bezeichnet, welcher sie 1787 veröffentlichte, da sie aber von Lagrange schon 1774 angegeben worden ist, so wollen wir sie die Lagrange'sche Transformation nennen. Es werden jetzt nicht mehr x und y, sondern p und q als unabhängige Veränderliche betrachtet. Folglich müssen x und y durch p und q dargestellt

werden. Wir haben

$$\frac{\partial w}{\partial p} = p\frac{\partial x}{\partial p} + x + q\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}$$

da einerseits $\frac{\partial q}{\partial p}$, weil q von p unabhängig, $=0$ ist, andrerseits z vorläufig noch als Function von x und y anzusehen ist. Indem wir

$$\frac{\partial w}{\partial p} = x + \frac{\partial x}{\partial p}\left(p - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial p}\left(q - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

schreiben, erhalten wir wegen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$:

$$10^1. \qquad x = \frac{\partial w}{\partial p}$$

und auf analogem Wege, da die Transformati[on] in den Paaren x, y; p, q symmetrisch ist:

$$10^2. \qquad y = \frac{\partial w}{\partial q}$$

Hierdurch geht die Gl. (10.) in die folgende über:

$$11. \qquad \frac{\partial w}{\partial p} f_1(p, q, w) + \frac{\partial w}{\partial q} f_2(p, q, w) = f_3(p, q, w)$$

welche formell mit der linearen Diff. gl. [...]

$$L\frac{\partial z}{\partial x} + M\frac{\partial z}{\partial y} = N$$

vollkommen übereinstimmt.
Man findet daher das allgemeine Integral von (II.) in der Form

$$v_1 = \varphi(u_1)$$

wobei φ eine willkürliche Function bezeichnet, u_1 und v_1 aus den Integralgleichungen $u_1(p, q, w) = \alpha$, $v_1(p, q, w) = \beta$ des Systemes gewöhnlicher Diff. gleichungen

$$\frac{dp}{f_1(p,q,w)} = \frac{dq}{f_2(p,q,w)} = \frac{dw}{f_3(p,q,w)}$$

zu entnehmen sind.
Nachdem dann aus $v_1 = \varphi(u_1)$, w ermittelt ist, ergiebt sich durch Differentiation

$$x = \frac{\partial w}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial w}{\partial q}, \quad z = p\frac{\partial w}{\partial p} + q\frac{\partial w}{\partial q} - w$$

die Darstellung von z als Function von x und y durch Elimination von p, q, w aus den Gleichungen

$$v_1 = \varphi(u_1), \quad x = \frac{\partial w}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial w}{\partial q}, \quad z = px + qy - w.$$

Die S. 13 begonnenen Untersuchungen wollen wir nunmehr auf n unabhängige Variabeln verallgemeinern. Es seien also $u_1, u_2 \cdots u_n$ gegebene Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots x_n$ und der abhängigen Veränderlichen z, und es bestehe für z die Bestimmungsgleichung

$$\Psi(u_1, u_2 \cdots u_n) = 0 \tag{12.}$$

Aus diesem Ansatze bilden wir wie oben durch Differentiation nach einer unabhängigen Variabeln

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_\nu}\right) + \cdots\cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_\nu}\right) = 0$$

$$(\nu = 1, 2 \cdots n)$$

Gleichungen welche inbezug auf die Grösse $\frac{\partial \Psi}{\partial u_i}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ homogen und linear sind. Wir können daher diese Differentialquotienten durch Nullsetzen der Determinante aus jenen Gleichungen eliminieren und finden, wenn wir noch

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = p_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots n)$$

setzen, die partielle Diff. gleichung erster Ordnung

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial z} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_n}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \tag{13.}$$

Diese kann auf folgende Weise als eine lineare erkannt werden. Wir setzen

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad D_{21} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

u. s. w.

so ist zunächst

$$\Delta_1 = D + p_1 D_1$$

Es wird nun Δ_1 in eine Determinante verwandelt, deren zweite Zeile ebenfalls mit der von Δ übereinstimmt, sie heisse Δ_2. Dieselbe Operation wird an D und D_1 vollzogen, sodass offenbar D in $D + p_2 D_2$, dagegen D_1 in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = D_1 + p_2 \cdot 0 = D_1$$

übergeht. Wir erhalten also

$$\Delta_2 = D + p_1 D_1 + p_2 D_2$$

Auf diese Weise weiter verfahrend, ergiebt sich die aus (12) hervorgehende Diff. gleichung als die lineare Diff. gleichung erster Ordnung

$$D + p_1 D_1 + p_2 D_2 + \cdots + p_n D_n = 0 \qquad 13^*.$$

Es sei umgekehrt die lineare Diff. gleichung

erster Ordnung

14. $$\mathfrak{L}_1 p_1 + \mathfrak{L}_2 p_2 + \cdots + \mathfrak{L}_n p_n = \mathfrak{L}$$

wo $\mathfrak{L}_1, \cdots \mathfrak{L}_n, \mathfrak{L}$ bestimmte Functionen von $x_1, \cdots x_n, z$ sind. Wir werden beweisen, dass sich die Functionen $u_1 \cdots u_n$ bestimmen lassen, sodass

15. $$\psi(u_1 \cdots u_n) = 0$$

ein Integral von (14) darstellt, wobei ψ eine willkürliche Function ist.

Soll nun $\psi = 0$ ein solches Integral sein, so müssen die aus den Gleichungen

15' $$\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_1}{\partial z} p_\nu\right) + \cdots\cdots + \frac{\partial\psi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_n}{\partial z} p_\nu\right) = 0$$
$$(\nu = 1, 2 \cdots n)$$

zu entnehmenden p_ν die Gleichung (14) befriedigen. Handelt es sich um die Integration von (14), so sind diejenigen Functionen $u_1 \cdots u_n$ zu bestimmen welche der durch Elimination der p_ν aus (14) und (15) resultierenden Gleichung genügen. Es folgt aber aus (15')

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\left\{\left(\mathfrak{L}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \mathfrak{L}_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial z}\left(\mathfrak{L}_1 p_1 + \cdots + \mathfrak{L}_n p_n\right)\right\} + \cdots\cdots = 0,$$

also wegen (14):

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\left(\mathfrak{L}_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\mathfrak{L}_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\mathfrak{L}\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\left(\mathfrak{L}_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\mathfrak{L}_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+\mathfrak{L}\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)=0$$

Aus dieser Gleichung fallen die, ebenso wie ψ willkürlichen Ableitungen $\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdots\cdots\frac{\partial\psi}{\partial u_n}$ heraus, wenn die Klammergrössen sämtlich $=0$ gesetzt werden. Sind daher n Lösungen $u_1\cdots u_n$ der partiellen Diff. Gleichung

$$15.^{x}\qquad \mathfrak{L}_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+\mathfrak{L}_2\frac{\partial w}{\partial x_2}+\cdots\cdots+\mathfrak{L}_n\frac{\partial w}{\partial x_n}+\mathfrak{L}\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

zu ermitteln, so ist $\psi(u_1\cdots u_n)=0$, wo ψ nicht bestimmt ist, ein Integral von (14). Die Integration der Gleichung (15.^{x}) geschieht mit Hülfe der S. 17 angegebenen Methode.

Dass jedes Integral der Diff. gleichung (14.) sich in der Form (15.) darstellen lässt, sieht man folgendermassen ein. Es sei

$$G(x_1, x_2, \cdots x_n, z)=0$$

irgend eine functionale Beziehung, welche (14) befriedigt, so muss die Function G

der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{L}_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \mathfrak{L}_n \frac{\partial G}{\partial x_n} + \mathfrak{L} \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

genügen, welche sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x_\nu} + \frac{\partial G}{\partial z} p_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n)$$

unter Voraussetzung von (14) ergiebt.
Es ist aber

$$\text{(b.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \mathfrak{L}_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \mathfrak{L} \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \\ \text{- - - - - - - - - - - -} \\ \mathfrak{L}_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \cdots + \mathfrak{L}_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \mathfrak{L} \frac{\partial u_n}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

Gleichungen, welche inbezug auf $\mathfrak{L}_1, \cdots \mathfrak{L}_n, \mathfrak{L}$ homogen und linear sind. Wenn also der singuläre Fall ausgeschlossen wird, dass diese $(n+1)$ Grössen gleichzeitig verschwinden, so muss nach (a.) (b.)

$$\frac{\partial(G, u_1, \cdots u_n)}{\partial(x_1, x_2 \cdots x_n, z)} = 0$$

sein, d. h. es muss zwischen $G, u_1, \cdots u_n$ eine Gleichung stattfinden, welche in den Coefficienten $x_1, x_2 \cdots x_n, z$ nicht enthält, oder, es ist

$$G = \chi(u_1 \cdots u_n),$$

wo χ die Grössen $x_1 \cdots x_n, z$ explicite nicht enthält. Es lässt sich also bei passender Bestimmung von ψ G in die Form (15.) setzen wie bewiesen werden sollte.

Den Fall, dass mehrere der Functionen $L_1 \cdots L_n$ L verschwinden, wollen wir nicht weiter ausführen, dagegen an einem bereits in Lagrange's Werk sich vorfindenden Beispiel für $n=3$ sowie an der Diff. gleichung der homogenen Functionen die allgemeinen Betrachtungen durchführen.

Es sei vorgelegt die Diff. gleichung

$$(x_2+x_3+z)p_1+(x_3+x_1+z)p_2+(x_1+x_2+z)p_3 = x_1+x_2+x_3$$

Ihr ist folgendes System gewöhnlicher Diff.-gleichungen zuzuordnen

$$\frac{dx_1}{x_2+x_3+z} = \frac{dx_2}{x_3+x_1+z} = \frac{dx_3}{x_1+x_2+z} = \frac{dz}{x_1+x_2+x_3}$$

oder

$$dx_1 = \lambda(x_2+x_3+z) \quad \cdots\cdots \quad dz = \lambda(x_1+x_2+x_3)$$

Hieraus folgt

$$dx_1 - dz = \lambda(z-x_1) \quad \cdots\cdots \quad dx_3 - dz = \lambda(z-x_3)$$

und durch Addition dieser Gleichungen

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 + dz = 3\lambda(z + x_1 + x_2 + x_3)$$

Die Elimination von λ ergiebt die integrablen Gleichungen

$$3\,\frac{dx_1 - dz}{z - x_1} = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3 + dz}{x_1 + x_2 + x_3 + z}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

aus welchen die Integralgleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + z - \alpha_1(x_1 - z)^3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + z - \alpha_2(x_2 - z)^3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + z - \alpha_3(x_3 - z)^3 = 0$$

hervorgehen. Wir erhalten daher für die vorgelegte partielle Diff. gleichung das allgemeine Integral $\psi(u_1, u_2, u_3) = 0$ wo

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + z}{(x_1 - z)^3}, \quad u_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + z}{(x_2 - z)^3}, \quad u_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + z}{(x_3 - z)^3},$$

ψ eine willkürliche Function ist.

Die partielle Diff. gleichung, welcher die homogenen Functionen genügen, ist

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots\cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = m\,z,$$

wenn m die Dimension der Function ist.

Um zu untersuchen, ob noch andere Functionen dieser Functionalgleichung Genüge leisten, stellen wir das zugehörige System

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots\dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mz}$$

auf, dessen Gleichungen auch geschrieben werden können:

$$m\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dz}{z}, \dots\dots$$

sodass sich als Integrale

$$x_1^m = \alpha_1 z, \dots\dots ; \quad \frac{z}{x_1^m} = 1 : \alpha_1 = \beta_1, \dots\dots$$

ergeben.

Hieraus folgt

$$\frac{x_2^m}{x_1^m} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \dots\dots \frac{x_n^m}{x_1^m} = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$$

also

$$\frac{x_2}{x_1} = \delta_1 \dots\dots \frac{x_n}{x_1} = \delta_{n-1}$$

Diese Gleichungen sowie die Gleichung

$$\frac{z}{x_1^m} = \beta_1$$

sind die $(n+1)$ Integralgleichungen, folglich ist

$$\psi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \dots \frac{x_n}{x_1}, \frac{z}{x_1^m}\right) = 0$$

oder

$$\frac{z}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \dots \frac{x_n}{x_1}\right),$$

wo ψ, φ willkürliche Functionen, das allgemeine Integral der partiellen Diff.gleichung.

Die Gleichung

$$z = x_1^m \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \dots \frac{x_n}{x_1}\right)$$

ist aber mit der Definitionsgleichung der homogenen Functionen übereinstimmend. Folglich ist die Euler-sche Eigenschaft für die homogenen Functionen charakteristisch. Wir wollen noch eine Anwendung auf einen fundamentalen Satz der Mechanik geben. Sind n Massenpunkte $m_1, m_2, \cdots m_n$ gegeben, X_ν, Y_ν, Z_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ die Componenten der auf sie wirkenden Kräfte, und bestehen zwischen den Coordinaten der Punkte p Bedingungsgleichungen:

$$F_\rho(x_1, y_1, z_1, \cdots\cdots x_n, y_n, z_n) = 0 \quad , \quad (\rho = 1, 2 \cdots p),$$

so lauten die Bewegungsgleichungen des Systemes in der ersten Lagrange-schen Form:

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} &= X_\nu + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_\nu} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_\nu} \\ m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} &= Y_\nu + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_\nu} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_\nu} \\ m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} &= Z_\nu + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_\nu} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_\nu} \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, \cdots n)$$

wo $\lambda_1 \cdots \lambda_p$ Multiplicatoren bedeuten, welche zusammen mit den $3n$ Coordinaten, aus den vorhandenen $3n+p$ Gleichungen

bestimmt werden können. Ist $M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$, so folgt aus der Gleichung

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots\cdots + m_n x_n = M\xi$$

und den analogen in y und z der Schwerpunkt. Für ihn erhält man aus den Bewegungsgleichungen leicht

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu + \lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \lambda_p\left(\frac{\partial F_p}{\partial x_1} + \cdots\right.$$

Die Grössen λ fallen fort, wenn, unter F irgend eine der Bedingungsgleichungen verstanden,

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

ist. Es bleiben alsdann drei Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes übrig deren Inhalt als das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes bezeichnet wird.
Nun wird leicht gezeigt, dass die Bedingungen (α) erfüllt sind, wenn jede der Functionen F nur von den Differenzen der Coordinaten abhängt. Unsere Betrachtungen lehren, dass nur in diesem Falle die Gleichungen (α) bestehen. Denn das entsprechende System

gewöhnlicher Diff. gleichungen lautet offenbar:

$$dx_1 = dx_2 = \cdots\cdots = dx_n = \frac{dF}{0}$$

und hat die Integrale

$$x_1 - x_2 = \alpha_1 \cdots\cdots x_1 - x_n = \alpha_{n-1} \quad F = \alpha_n \;;$$

daher ist das allgemeine Integral der Gleichung (α)

$$F(x_1 - x_2, \cdots\cdots x_1 - x_n) = \alpha_n$$

Ein ganz analoges Verfahren ist bei dem „Princip der Flächen" einzuschlagen, wie aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Capitel 3

Wir wenden uns zu den nichtlinearen Diff. gleichungen erster Ordnung, deren allgemeiner Typus die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{16.}$$

sei. Auch hier handelt es sich um die Zurückführung auf gewöhnliche Diff. gleichungen; doch findet nicht ein so unmittelbarer Zusammenhang mit diesen statt wie bei den linearen, und man wird zunächst ein vollständiges Integral zu ermitteln suchen, von welchem man dann durch Variation der Constanten zu dem allgemeinen, und, falls ein solches existiert, zum singulären Integral übergehen kann.

Es giebt Classen einfacher Fälle, in welchen man ein solches vollständiges Integral fast ohne Rechnung angeben kann. Wir gehen aus von der Diff. gleichung, welche bei passender Wahl der Achse eine Cylinderfläche darstellt

$$q = m p.$$

Es ist nun

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

und daher muss

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

sein. Man kann offenbar, unter α eine willkürliche Constante verstanden,

$$p = \alpha, \quad q = m\alpha$$

setzen, und es ergiebt sich

$$dz = \alpha\, dx + m\alpha\, dy$$

$$z = \alpha x + m\alpha y + \beta$$

als das gesuchte vollständige Integral. Diese schon oben behandelte Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung

17. $$q = f(p)$$

Wir können hier wieder setzen

$$p = \alpha, \quad q = f(\alpha),$$

und es folgt das vollständige Integral

17'. $$z = \alpha x + f(\alpha) y + \beta$$

Zur Herleitung des allgemeinen ist $\beta = \varphi(\alpha)$ zu setzen und die partielle Ableitung von z nach α hinzuzunehmen. Um rückwärts die Gleichung $q = f(p)$ zur Lösung einer flächentheoretischen Aufgabe zu specialisieren, so sollen diejenigen

Flächen gesucht werden, deren Tangentialebenen mit einer festen Ebene einen constanten Winkel bilden. Die feste Ebene werde als xy-Ebene angenommen, sodass der Richtungscosinus des bezeichneten Winkels $= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ und folglich auch p^2+q^2 constant ist:

$$p^2+q^2=a^2$$

oder, in die Form von (17.) gesetzt:

$$q=\sqrt{a^2-p^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Diff. gleichung ergiebt sich aus

$$z=\alpha x+\sqrt{a^2-\alpha^2}\cdot y+\varphi(\alpha).$$

$$0=x-\frac{\alpha}{\sqrt{a^2-\alpha^2}}y+\varphi'(\alpha).$$

und durch Elimination von α erhalten wi[r] offenbar eine abwickelbare Fläche, deren Gestalt noch von der willkürlichen Functi[on] φ abhängt.

In ähnlicher Weise wie in (17.) kann die Diff[...]

18. $$q=f(p,y)$$

gelöst werden, indem zunächst

$$p=\alpha \quad \text{also} \quad q=f(\alpha,y)$$

gesetzt wird, worauf sich das vollständig[e]

Integral wieder durch eine Quadratur, nämlich

18'. $$z = \alpha x + \int f(\alpha, y)\, dy + \beta$$

ergiebt.

Es sei schliesslich die partielle Diff. gl.

19. $$f_1(x, p) = f_2(y, q)$$

vorgelegt, welche also z explicite nicht enthalten soll.

Wir können hier

$$f_1(x, p) = \alpha \text{ also auch } f_2(y, q) = \alpha$$

setzen. Es seien diese Gleichungen, nach p und q aufgelöst,

$$p = \varphi_1(x, \alpha) \qquad q = \varphi_2(y, \alpha)$$

so erhalten wir

19'. $$z = \int \varphi_1(x, \alpha)\, dx + \int \varphi_2(y, \alpha)\, dy + \beta$$

als vollständiges Integral. – In allen diesen speciellen Fällen ist $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, also die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

Es handelt sich nun darum, dieses Verfahren, ein vollständiges Integral zu finden, planmässig zu verallgemeinern. Angenommen man könnte der vorgelegten Diff. gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{16.}$$

eine zweite Gleichung, in welcher eine willkürliche Constante α enthalten ist,

$$F_1(x, y, z, p, q) = 0 \tag{17}$$

zuordnen und aus (16.) und (17.) p und q so bestimmen, dass sie der Integrabilitäts-bedingung genügen, so wird sich das vollständige Integral wieder durch eine Quadratur und Hinzufügung einer zweiten Constanten β ermitteln lassen. Wir fragen also, wie F_1 zu wählen sei, damit die aus (16.) und (17.) resultierenden Werte für p und q der Integrabilitäts-bedingung Genüge leisten?

Nachdem p und q aus $F = 0$ und $F_1 = \alpha$ als Functionen von x, y, z entnommen sind, muss jedenfalls

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sein, nach der Definition von z. Da p und q auch z enthalten, so können wir, um keine Variable zu bevorzugen, diese Gleichung auch so schreiben

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0, \tag{18.}$$

woraus

$$dz = -\frac{L}{N}dx - \frac{M}{N}dy \qquad (18^x)$$

unter der Voraussetzung $N \gtrless 0$.
Sind $\frac{L}{N}, \frac{M}{N}$ Functionen von x und y allein, so ist die Integrabilitätsbedingung einfach:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Im allgemeinen Falle sind die Bedingungen, welchen L, M, N genügen müssen, aufzusuchen. Angenommen, der Inhalt der Gl. (18.) drücke sich aus durch die functionale Beziehung

$$G(x, y, z) = 0 \qquad (18')$$

wenn hieraus z als Function von x und y entnommen und in $-\frac{L}{N}, -\frac{L}{N}$ eingesetzt wird, so müssen die umgewandelten Grössen die partiellen Ableitungen der so bestimmten Function z sein, und da x, y voneinander unabhängig sind, so muss einzeln

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{M}{N}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{L}{N}$$

sein; und umgekehrt: wenn eine solche Function z existiert, so muss sie diesen Gleichungen genügen.

Wir können nun die erste Bedingung in der Form einer gewöhnlichen Diff. gl. schreiben

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{M}{N}$$

oder

$$M dx + N dy = 0$$

Ein nach der Constanten aufgelöstes Integra dieser Gleichung sei

$$H = C,$$

wobei H eine bestimmte Function von y und die ausserdem den Parameter x enthält — da dieser in M, N auftritt —, C eine willkürl Function von x ist.

Es ist dann jedenfalls

$$dH = \lambda (M dy + N dz),$$

wo λ einen Factor, den sogenannten integrirenden Factor bedeutet.

Wir können uns nun H <u>definiert</u> denken durch die Gleichung

$$\lambda (M dy + N dz) = \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz,$$

dann ist bei passender Bestimmung von λ

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda M, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \lambda N.$$

Wir schreiben nun die Integralgleichung $H=C$ ausführlicher

$$H(y,z,x)=\varphi(x)$$

Es fragt sich, ob φ so bestimmt werden kann, dass auch die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{L}{N}$$

befriedigt wird.

Nun haben wir

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\varphi'(x)=0$$

Soll diese Gleichung zugleich mit $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{L}{N}$ erfüllt sein, so muss

$$\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{L}{N}\frac{\partial H}{\partial z}-\varphi'(x)=0$$

sein, wo auf Grund der Gl. $H=C$, z eine Function von x und y ist. Die Frage ist also schliesslich, ob sich die Gleichung

$$\varphi'(x)=\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{L}{N}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}$$

bei passender Wahl von φ erfüllen lässt; es ist dabei vorausgesetzt, dass z als Function von x und y aus der Integralgleichung $H(y,z,x)=\varphi(x)$ entnommen und in diese Gleichung für φ' eingesetzt ist.

Da nun $\varphi(x)$ eine Function von x allein ist, so muss, falls die Bestimmung dieser Function möglich sein soll,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right) = 0$$

sein, eine Bedingung, welche sich auf folgende Weise in eine solche zwischen den Coefficienten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ der Gl. (18.) überführen lässt. Es soll sein

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z}\left(\frac{\partial \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Die Vorschrift, dass z aus $H = C$ eingeführt werde, kommt darauf hinaus, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ zu setzen. Indem wir ferner die zweiten Ableitungen von H auf Grund der Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda\mathfrak{M}, \frac{\partial H}{\partial z} = \lambda\mathfrak{N}$ in geeigneter Weise ersetzen, erhalten wir:

$$\frac{\partial(\lambda\mathfrak{M})}{\partial x} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{\partial(\lambda\mathfrak{N})}{\partial x} - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{\partial(\lambda\mathfrak{M})}{\partial z} + \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}^2}\cdot\frac{\partial(\lambda\mathfrak{N})}{\partial z} - \lambda\mathfrak{N}\left(\frac{\partial\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}}{\partial y} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\frac{\partial\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}}{\partial z}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} + \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}^2}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} - \mathfrak{N}\left(\frac{\mathfrak{N}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - \mathfrak{L}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}}{\mathfrak{N}^2} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{\mathfrak{N}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \mathfrak{L}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}}{\mathfrak{N}^2}\right) = 0$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}\right) + \mathfrak{M}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}\right) + \mathfrak{N}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right) = 0 \tag{19.}$$

Dies ist die gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit

der gestellten Aufgabe. Sie ist sozusagen die Integrabilitätsbedingung für (18.). Die Notwendigkeit dieser Bedingung könnte aus den Gleichungen (18.) und (18'.) sehr leicht abgeleitet werden, es würde aber dann nicht folgen, dass sie auch hinreicht, d. h. dass man, wenn (19.) besteht, umgekehrt (18'.) und (18.) herleiten könne. Aus dem von uns eingeschlagenen Wege wissen wir, dass dies durch Integration der beiden gewöhnlichen Diff. gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{M}{N} \qquad \varphi'(x) = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{L}{N}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}$$

geschehen kann.

Bei Anwendung der Bezeichnung

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0$$

ist $L = p$, $M = q$, $N = -1$, und es lautet die Bedingung

$$p\frac{\partial q}{\partial z} - q\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} \qquad (19.^x)$$

Dieser Bedingung gemäss sind also die Grössen p, q zu wählen, die wir aus $F = 0$

zusammen mit einer noch hinzutretenden Gleichung $F_1 = \alpha$ bestimmen wollen, und ist diese Bedingung für p und q erfüllt, so lässt sich z aus $p\,dx + q\,dy = dz$ bestimmen. Um nun zu der ursprünglichen Aufgabe der Bestimmung von F_1 zurückzukehren, so ist zunächst offenbar, dass die Gleichungen (16.) und (17.), damit aus ihnen p und q bestimmt werden können, weder von einander abhängig noch miteinander unverträglich sein dürfen. Wenn nun $F_1 = \alpha$ als ermittelt angesehen wird und p und q aus dieser Gleichung sowie aus $F = 0$ bestimmt sind, so werden sie, falls für p und q ihre Ausdrücke in x, y, z zurück in jene Gleichungen eingesetzt werden, Identitäten ergeben. Wir differentiiren diese nach z, y, x. Die beiden ersten der sechs sich so ergebenden Gleichungen sind

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Aus ihnen und den analogen durch Differentiation nach y und x gebildeten

Gleichungen berechnen wir die in der Integrabilitätbedingung (19*) auftretenden Differentialquotienten $\frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$.
Bezeichnen wir

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial q}-\frac{\partial F_1}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p,q)}=D$$

so ergiebt sich

$$D\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial q}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

$$D\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial p}=0$$

und ebenso aus den nicht hingeschriebenen Gleichungen:

$$D\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial p}=0$$

$$D\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial q}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

Daher lautet die Bedingung (19*):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}+p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\right)=\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial q}+q\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)$$

oder, wenn nach den Differentialquotienten der zu bestimmenden Function F_1 geordnet wird:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)=0 \qquad (20)$$

Dies ist eine homogene lineare partielle Diff. gleichung erster Ordnung zur Bestimmung von F_1. Von ihr kommt man mit Benutzung der für $\frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}$ erhaltenen Formeln zur Integrabilitätsbedingung zurück, vorausgesetzt dass $D \neq 0$ ist. Diese Voraussetzung ist aber von vornherein zu machen, weil sonst die Functionen F und F_1 nicht unabhängig von einander wären.

Wir bezeichnen noch

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_{(x)}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_{(y)}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F'_{(z)}, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = F'_{(p)}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = F'_{(q)}$$

so lautet also die Gleichung für F_1:

$$20^{x}.\quad F'_{(p)} \frac{\partial F_1}{\partial x} + F'_{(q)} \frac{\partial F_1}{\partial y} + (p F'_{(p)} + q F'_{(q)}) \frac{\partial F_1}{\partial z} - (F'_{(x)} + p F'_{(z)}) \frac{\partial F_1}{\partial p} - (F'_{(y)} + q F'_{(z)}) \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0$$

Es seien $u_1, u_2, u_3, u_4, \alpha$ unabhängige Lösungen des gehörigen Systemes gewöhnlicher Diff. gl.

$$21.\quad \frac{dx}{F'_{(p)}} = \frac{dy}{F'_{(q)}} = \frac{dz}{p F'_{(p)} + q F'_{(q)}} = - \frac{dp}{F'_{(x)} + p F'_{(z)}} = - \frac{dq}{F'_{(y)} + q F'_{(z)}} = \frac{dF_1}{0}$$

so ist, nach α aufgelöst

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \alpha$$

also

$$F_1 = \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

das allgemeine Integral von (20ˣ.).
Da die Function φ ganz willkürlich ist, so können wir auch

$$F_1 = u_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

annehmen. Die allgemeine Lösung ist daher von keiner Bedeutung, sondern es braucht nur irgend ein Integral dieses Systemes ermittelt zu werden, z. B. u_1. Es ist dann $u_1 = \alpha$ zu setzen und hieraus sowie aus der Gleichung $F = 0$ p und q zu bestimmen, wobei aber diese beiden Gleichungen, wie schon erwähnt, weder voneinander abhängig noch miteinander unverträglich sein dürfen. Nun lässt sich bei Einführung eines Proportionalitätsfactors λ das System (21.) folgendermassen schreiben

$$21^x. \quad \begin{cases} dx = \lambda F'_{(p)} \\ dy = \lambda F'_{(q)} \\ dz = \lambda (p F'_{(p)} + q F'_{(q)}) \\ dp = -\lambda (F'_{(x)} + p F'_{(z)}) \\ dq = -\lambda (F'_{(y)} + q F'_{(z)}) \end{cases}$$

woraus

$$F'_{(x)}dx + F'_{(y)}dy + F'_{(z)}dz + F'_{(p)}dp + F'_{(q)}dq = 0$$

$$dF = 0$$

folgt. Es ist also

$$F = C$$

ebenfalls ein Integral von (21.). Dieses aber können wir nicht gebrauchen; denn wenn $C = 0$ ist, so ist die Gleichung $F_1 = 0$ mit der gegebenen $F = 0$ identisch, und wenn $C \neq 0$, mit dieser unverträglich. Es kann also eine der Gleichungen (21.) von vornherein fortgelassen werden. Ferner folgt aus (21*)

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

eine Gleichung, welche natürlich auch in (21.) enthalten ist. Damit man also nicht Gefahr läufe, auf eine Identität zu komme[n], wird man zweckmässig einen der drei ersten Quotienten in (21.) wegzulassen und eine aus dem übrig bleibenden System sich ergebende Lösung zur Aufstellung der Gleichung $F_1 = \alpha$ benutzen.

Es sei z. B.

$$F \equiv pq - z = 0$$

die vorgelegte Diff. gleichung, also
$F'_{(x)}=0$, $F'_{(y)}=0$, $F'_{(z)}=-1$, $F'_{(q)}=p$, $F'_{(p)}=q$

Nach der soeben gegebenen Regel lassen wir in dem Systeme

$$\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\frac{dz}{2pq}=\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$$

den ersten Quotienten weg und benutzen etwa das Integral

$$p=y-\beta$$

welches sich aus $dy=dp$ ergiebt. Aus $z=pq$ folgt sodann

$$q=\frac{z}{y-\beta}$$

$$dz=(y-\beta)dx+\frac{z}{y-\beta}dy$$

$$dx=\frac{dz}{y-\beta}-\frac{z}{(y-\beta)^2}dy=d\left(\frac{z}{y-\beta}\right).$$

Hiernach erhalten wir

$$\frac{z}{y-\beta}=x-\alpha$$

und es wird

$$z=(x-\alpha)(y-\beta)$$

das gesuchte vollständige Integral.
Im allgemeinen ist aber ein solches vollständiges Integral nicht eindeutig

bestimmt. Wählen wir in unserem Beispiele z. B. das Integral

$$p = aq$$

des Systemes gewöhnlicher Diff. gleichungen, so folgt:

$$z = pq = aq^2$$

$$q = \sqrt{\frac{z}{a}} \qquad p = \sqrt{az}$$

$$dz = \sqrt{az}\,dx + \sqrt{\frac{z}{a}}\,dy$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{a}\,dx + \frac{1}{\sqrt{a}}\,dy$$

und es wird

$$\sqrt{z} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{1}{\sqrt{a}}\,y + b\right)$$

das vollständige Integral.

Überhaupt ist ein Integral des Systemes immer dann $q = \alpha p$, wenn in der vorgelegten Diff. gleichung die unabhängigen Variablen x, y nicht explicite vorkommen, wenn sie also die Form

$$F(z, p, q) = 0 \tag{22}$$

hat. Diese Gleichung geht, wenn

$$q = \alpha p$$

gesetzt wird, in

$$F(z, p, \alpha p) = 0 \tag{22*}$$

über, deren Auflösung nach p möglich sei:

$$p = f(z, \alpha)$$

Aus

$$dz = f(z,\alpha)(dx + \alpha\, dy)$$

ergiebt sich dann

$$23. \qquad x + \alpha y + \beta = \int \frac{dz}{f(z,\alpha)}$$

als vollständiges Integral.
Ein solches Verfahren ist z. B. bei der Lösung folgender Aufgabe anwendbar: Diejenigen Flächen zu bestimmen, deren Normalen von der Fläche aus gerechnet bis zu einer festen Ebene eine Constante Länge haben.
Die gegebene Ebene sei die xy-Ebene des Coordinatensystemes,
P ein Punkt der Fläche,
PA das bezeichnete Stück der Normale $= a$,
PA senkrecht auf der xy-Ebene, also

$$\cos QPA = Z = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad aZ = z$$

Die Flächen werden also durch die Diff. gleichung

$$z\sqrt{p^2+q^2+1} = a$$

definiert, welche wir in der Form

(a.) $$z^2(p^2+q^2+1) = a^2$$

integrieren wollen. Wir setzen also hier $q=\alpha p$, so folgt aus $z^2(1+p^2+\alpha^2 p^2)=a^2$:

$$p = \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z\sqrt{1+\alpha^2}}$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel unbestimmt bleibt; das vollständige Integral von (a) lautet demnach

$$x+\alpha y+\beta = \int \frac{z\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz$$

oder integriert:

(b.) $$(x+\alpha y+\beta)^2 = (1+\alpha^2)(a^2-z^2)$$

Das allgemeine Integral ergiebt sich durch Elimination von α aus den Gleichungen

(c.) $$\begin{cases} (x+\alpha y+\varphi(\alpha))^2-(1+\alpha^2)(a^2-z^2)=0 \\ (x+\alpha y+\varphi(\alpha))(y+\varphi'(\alpha))-\alpha(a^2-z^2)=0 \end{cases}$$

bei gegebenem $\varphi(\alpha)=\beta$.

Das singuläre Integral folgt aus

$$(x+\alpha y+\beta)\,y-\alpha(a^2-z^2)=0$$

$$x+\alpha y+\beta \qquad\qquad =0$$

durch Elimination von α und β, wenn noch

(b.) hinzugenommen wird. Wir erhalten

$$(1+\alpha^2)(a^2-z^2)=0$$

$$\alpha(a^2-z^2)=0$$

Folglich, da die ersten Factoren nicht null sein können

(A.) $$z=\pm a$$

das sind zwei im Abstande a zur xy-Ebene parallele Ebenen. Um die durch das allgemeine Integral definierten Flächen zu bestimmen, führen wir ein neues Coordinatensystem ein durch die Transformation

$$\frac{x+\alpha y+\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\xi,$$

wodurch (b.) in

(B.) $$\xi^2+z^2=a^2$$

übergeht. Das vollständige Integral stellt demnach die Fläche eines Cylinders dar, welcher auf der ξz-Ebene senkrecht steht und von α, β selbstverständlich abhängig ist. Die η- und ξ-Achse des neuen Coordinatensystemes befinden sich in der Ebene $z=0$ des ursprünglichen.

Die Leitlinie des Cylinders hat die Gleichung

$$\xi = 0, \quad z = 0,$$

ist daher die η-Achse des neuen Systems. In den ursprünglichen Coordinaten lauten ihre Gleichungen

$$x + \alpha y + \beta = 0, \quad z = 0.$$

Zur Herleitung des allgemeinen Integrales musste $\beta = \varphi(\alpha)$ gesetzt werden, wobei α veränderlich bleibt. Dies bedeutet: Die Achse der Cylinderfläche bewegt sich nach irgend einem vorgegebenen Gesetze in der Ebene $z=0$, und gleichzeitig ändert sich die Cylinderfläche. Da nun das allgemeine Integral als Enveloppe charakterisiert werden kann (S. so stellt es im vorliegenden Falle die Enveloppe einer Cylinderfläche dar, welche sich nach einem gegebenen Gesetze in der Ebene $z=0$ bewegt.

Die Herleitung eines vollständigen Integrales in einer anderen Form liefert eine andere geometrische Deutung.

Die Hülfsdifferentialgleichung möge lauten

$$\frac{dx}{F_{(p)}} = \frac{dz}{p F_{(p)} + q F_{(q)}}$$

d. i.

$$\frac{dx}{pz^2} = \frac{dz}{(p^2+q^2)z^2}$$

Aus ihr folgt, da $p^2+q^2 = \frac{a^2-z^2}{z^2}$ ist und $p = \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z\sqrt{1+\alpha^2}}$.

$$\frac{dx}{z^2} \cdot \frac{z\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{a^2-z^2}} = \frac{dz}{a^2-z^2}$$

$$dx\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$(x-\beta)\sqrt{1+\alpha^2} = -\sqrt{a^2-z^2}$$

und wenn wieder $\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{pz}$ gesetzt wird:

$$x + pz = \beta$$

ein Integral des Systemes gewöhnlicher Diff. gleichungen. Wir setzen nun

$$p = \frac{\beta-x}{z}\,, \quad q^2 = \frac{a^2-z^2-(\beta-x)^2}{z^2}$$

in dz ein und integrieren:

$$dz = \frac{\beta-x}{z}dx + \frac{\sqrt{a^2-(\beta-x)^2-z^2}}{z}dy$$

$$dy = \frac{z\,dz+(x-\beta)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-\beta)^2-z^2}}$$

$$y - \gamma = -\sqrt{a^2-(x-\beta)^2-z^2}.$$

Dieses Integral, welches wir noch auf die Form

(C.) $$(x-\beta)^2+(y-\gamma)^2+z^2=a^2$$

bringen wollen, stellt eine Kugel dar, deren

Mittelpunkt in der Ebene $z=0$ gelegen ist.
Für das allgemeine Integral erhalten wir folgende Deutung: Der Mittelpunkt der Kugel beschreibt in der Ebene $z=0$ eine beliebige durch die Gleichung $\gamma=\varphi(\beta)$ dargestellte Curve; die gesuchte Fläche erscheint als Enveloppe einer Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte auf dieser Curve liegen, sie ist also eine Kanalfläche mit ebener Directrix.
Das singuläre Integral ergiebt sich aus

$$x-\beta=0 \qquad y-\gamma=0$$

in derselben Gestalt $z=\pm a$ wie vorher.

Dieses von Lagrange herrührende Integrationsverfahren wollen wir nach Jacobi auf eine Gleichung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen auszudehnen suchen.
Es soll also ein vollständiges Integral der partiellen Diff.gleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2 \cdots x_n, z, p_1 p_2 \cdots p_n) = 0$$

ermittelt werden, wobei wieder

$$p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt ist. Das vollständige Integral muss n Constanten enthalten. Wenn man nun zu der vorgelegten Diff. gleichung noch $n-1$ andere bestimmen kann,

$$F_1(x_1 \cdots\cdots p_n) = a_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{n-1}(x_1 \cdots\cdots p_n) = a_{n-1}$$

sodass sich aus den sämtlichen Gleichungen $p_1 \cdots p_n$ berechnen lassen, so ergiebt sich die n^{te} Constante bei der Integration des Ausdruckes

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots\cdots + p_n dx_n.$$

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} = \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda}$$

laute, dass also in $p_1 \cdots p_n$ die abhängige Variable nicht auftrete. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, dass die n Gleichungen z explicite nicht enthalten. Wir werden später zeigen, dass eine solche Annahme immer gestattet ist und dass sie stets durch eine Transformation erreicht werden

kann, welche nur die Anzahl der abhängigen Variabeln um eine vermehrt.
Es sei also

$$F(x_1, x_2 \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0 \tag{24}$$

die vorgelegte Diff. gleichung. Zu ihr denken wir uns $n-1$ andere hinzugenommen:

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2 \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{n-1}(x_1\, x_2 \cdots x_n\, p_1\, p_2 \cdots p_n) = 0 \end{array}\right. \tag{25}$$

welche die willkürlichen Constanten $a_1 \cdots a_{n-1}$ enthalten und aus welchen, zusammen mit (24) die Grössen $p_1 \cdots p_n$ berechnet werden können. Das vollständige Integral mit n willkürlichen Constanten ergiebt sich dann aus $dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$. Die Functionen $F_1 \cdots F_n$ müssen so beschaffen sein, dass die Grössen $p_1 \cdots p_n$ der Integrabilitätsbedingung

$$p_{\lambda\mu} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda} = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n;\ \lambda \gtrless \mu) \tag{25^x}$$

genügen. Es soll jetzt untersucht werden was man unter Voraussetzung dieser Bedingungen über die Form von $F_1 \cdots F_n$ aussagen kann.

und umgekehrt, ob die für diese Functionen hergeleiteten Bedingungen das System (25^x) ersetzen können.
Wir differentiieren die Gleichung F_i nach x_λ, $F_\kappa = 0$ nach x_μ:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} \cdot \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} = 0$$

multiplicieren die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda}$ und summieren von $\lambda = 1$ bis n, die zweite mit $\frac{\partial F_i}{\partial p_\mu}$ und summieren über μ und erhalten auf diese Weise:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} \cdot \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda} = 0$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} = 0$$

Schreiben wir noch $\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_\lambda}$ statt $\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu}$, so ergiebt sich durch Subtraktion:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_\lambda} \right) + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} \right) = 0$$

oder, indem wir noch die Bezeichnung

26. $$\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial \mathfrak{F}_k}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial \mathfrak{F}_k}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial p_\lambda}\right)=(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{F}_k) \qquad \begin{pmatrix} i=0,1,\dots(n-1) \\ k=0,1,\dots(n-1) \\ \mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}\end{pmatrix}$$

einführen:

27. $$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial p_\mu}\cdot\frac{\partial \mathfrak{F}_k}{\partial p_\lambda}\,p_{\lambda\mu}=(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{F}_k)$$

Nun ist ersichtlich, dass für alle Wertepaare i,k

27*. $$(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{F}_k)=0$$

ist, wenn für alle Combinationen λ,μ $p_{\lambda\mu}=0$ ist. Die Gleichungen $(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{F}_k)=0$ sind also eine notwendige Folge der Integrabilitätsbedingungen. Wir wollen zeigen, dass wenn umgekehrt die Gleichungen (27*) bestehen, für alle Combinationen λ,μ die Bedingung (25*) erfüllt ist.

Die Anzahl der Grössen $p_{\lambda\mu}$, in welchen die Gleichungen (27*) homogen und linear sind, ist $\frac{n(n-1)}{2}$, wenn $\lambda\gtrless\mu$ genommen wird. Die Werte $p_{\lambda\lambda}$ kommen, weil identisch verschwindend, nicht in Betracht. Deshalb gilt für die Grössen $(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{F}_k)$ deren Anzahl ebenfalls $\frac{n(n-1)}{2}$ ist für $i\gtrless k$, und welche für $i=k$ identisch verschwinden. Es ist nur noch zu untersuchen, ob für $i=k$ auch die Gleichungen

(27.) gelten. Wir setzen zur Abkürzung in (27.):

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda}\right)$$

und vertauschen die Indices λ, μ:

$$S = -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_\lambda} \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\mu}\left(-\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu}\right)$$

so folgt durch Subtraction:

$$2S = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial F_i}{\partial p_\lambda} \cdot \frac{\partial F_\kappa}{\partial p_\mu}\right) p_{\lambda,\mu}$$

Hiernach verschwindet in der That S identisch für $\kappa = i$, und es würde deshalb aus (27.), falls die Gleichungen (27*) bestehen, das Verschwinden der $p_{\lambda\mu}$ folgen, vorausgesetzt dass die Determinante von (27.) von Null verschieden ist. Anstatt jedoch diese Determinante zu berechnen, wollen wir die Gleichungen (27.) nach $p_{\lambda\mu}$ auflösen. Für diese Rechnung setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} = a_{i\mu}, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots n-1 \\ \mu = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

so geht (27.) über in

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} a_{\kappa\lambda} p_{\lambda\mu} = (F_i, F_\kappa) \tag{27'}$$

Es sei ferner α_{rs} die zu a_{rs} adjungierte Grösse in dem Schema der Determinante

28. $$D \equiv |a_{rs}| \equiv \left|\frac{\partial F_r}{\partial p_s}\right| \quad \begin{pmatrix} r=0,1,\cdots n-1 \\ s=1,2,\cdots n \end{pmatrix}$$

so ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ir} a_{iu} = \begin{cases} 0 & \text{für } u \gtrless r \\ D & \text{,, } u = r \end{cases} \quad (u, r = 1, 2, \cdots n)$$

folglich nach (27!)

$$D \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda} p_{\lambda r} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ir} (F_i, F_\kappa)$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Identitäten

$$\sum_{\kappa=0}^{n-1} \alpha_{\kappa s} a_{\kappa\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \gtrless s \\ D & \text{,, } \lambda = s \end{cases} \quad (\lambda, s = 1, 2, \cdots n)$$

auf dieselbe Weise:

29. $$D^2 \cdot p_{sr} = \sum_{i=0,}^{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \alpha_{ir} \alpha_{\kappa s} (F_i, F_k), \quad (s, r = 1, 2, \cdots n)$$

Die Gleichungen (27*) sind daher für die Erfüllung der Integrabilitätsbedingungen (2') auch hinreichend, falls die Determinante D von Null verschieden ist. Dies ist aber stets der Fall, weil das Bestehen einer Relation zwischen den Functionen $F_1, F_2 \cdots F_n$ die

Berechnung von $p_1, p_2 \cdots p_n$ aus den Gleichungen $F=0$, $F_1=0, \cdots F_{n-1}=0$ unmöglich machen würde. Die Ermittelung der Functionen $F_1 \cdots F_{n-1}$ kommt hiernach auf die Integration des Systemes

$$(F_i, F_k)=0 \qquad \begin{pmatrix} i,k=0,1,2\cdots n-1 \\ i \gtrless k \quad F_0=F \end{pmatrix}$$

hinaus, welches wir der Übersichtlichkeit halber in der Form

$$30. \quad \begin{cases} (F, F_1)=0,\ (F, F_2)=0 \cdots\cdots (F, F_{n-1})=0 \\ \qquad\qquad (F_1, F_2)=0 \cdots\cdots (F_1, F_{n-1})=0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (F_{n-2}, F_{n-1})=0 \end{cases}$$

schreiben. Die Functionen F_i haben also zunächst den Diff. gleichungen

$$(F, F_i) = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_\lambda} \right) = 0, \quad (i=1 \cdots n-1)$$

oder, um auszudrücken dass F gegeben ist, den D. Gleichungen

$$30^a. \quad F'_{(p_1)} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \cdots + F'_{(p_n)} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} - F'_{(x_1)} \frac{\partial F_i}{\partial p_1} - \cdots - F'_{(x_n)} \frac{\partial F_i}{\partial p_n} = 0, \quad (i=1 \cdots n-1)$$

zu genügen. Für $n=2$ z. B., wo

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad p_1 = p, \quad p_2 = q$$

sind F_1 und F_2 aus der Diff. Gleichung

$$F'_{(p)}\frac{\partial F_i}{\partial x}+F'_{(q)}\frac{\partial F_i}{\partial y}-F'_{(x)}\frac{\partial F_i}{\partial p}-F'_{(y)}\frac{\partial F_i}{\partial q}=0\ ,\ (i=1,2)$$

zu bestimmen, einer Gleichung, welche mit der obigen (20^x) S. 60 identisch ist, wenn man beachtet, dass unserer Annahme gemäss F, F_1, F_2 die Variable z nicht explicit enthalten sollen. Im allgemeinen Falle ist $n-1$ die Zahl der zu bestimmenden Functionen, die Zahl der Bedingungen (31) $\frac{1}{2}n(n-1)$, weil $(F_i, F_k)=-(F_k, F_i)$ ist. Sind also $F_1 \dots F_{n-1}$ Integrale der Diff. gleichungen (31), so müssen sie noch $\frac{1}{2}n(n-1)-n-1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Bedingungen genügen. Die Integration v. (30^a) hängt in bekannter Weise mit der des Systemes

$$\frac{dx_1}{F'_{(p_1)}}=\frac{dx_2}{F'_{p_2}}=\dots\dots=\frac{dx_n}{F'_{(p_n)}}=-\frac{dp_1}{F'_{(x_1)}}=-\frac{dp_2}{F'_{(x_2)}}=\dots\dots=-\frac{dp_n}{F'_{(x_n)}}$$

zusammen. Ist

$$\bar{F}_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n, a_1)=0$$

irgend ein Integral dieses Systemes, so kann sofort $F_1=\bar{F}_1$ gesetzt werden, und da das System $(2n-1)$ Gleichungen enthält, so können die $n-1$

Functionen $F_1 \dots F_{n-1}$ auf diese Weise bestimmt werden. Aber es ist nicht sicher, dass die so bestimmten $F_1 \dots F_{n-1}$ auch den übrigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Gleichungen (30.) genügen. Es ist daher notwendig, auf die Integration eines solchen Systemes simultaner partiellen Diff. gleichungen näher einzugehen. Indem wir vor der Hand ganz davon absehen, dass es sich um die Integration der Diff. gleichung $F=0$ handelt, behandeln wir folgende Aufgabe: Es seien zwei homogene lineare partielle Diff. gleichungen erster Ordnung gegeben:

$$31. \begin{cases} (a) \quad A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \\ (b) \quad B_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots + B_n \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

wo $A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_n$ gegebene Functionen der n unabhängigen Variabeln $x_1 \dots x_n$ sind. Es soll die Bedingung dass diese beiden simultanen Diff. gleichungen eine gemeinsame Lösung besitzen, aufgestellt und die Darstellung dieses Integrales gegeben werden.

Wir gelangen zu diesem Ziele durch den Jacobi'schen Fundamentalsatz für simultane Systeme. Die linken Seiten der Gleichungen (31.) seien mit $A(U), B(U)$ bezeichnet,

$$A(U) = \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}\ , \quad B(U) = \sum_{\lambda=1}^{n} B_\lambda \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}$$

Wir bilden hiernach

$$A(B(U)) = \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda \frac{\partial B(U)}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1} A_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu \frac{\partial U}{\partial x_\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda \left(\sum_{\mu=1}^{n} B_\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda} \right)$$

und analog

$$B(A(U)) = \sum_{\lambda=1}^{n} B_\lambda \left(\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \right)$$

Nun ist erstens die Reihenfolge der Summation vertauschbar, sodass wir schreiben können:

$$A(B(U)) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} A_\lambda B_\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} B_\lambda \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda}$$

$$B(A(U)) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} A_\lambda B_\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} B_\lambda \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}$$

und ferner wird vorausgesetzt, dass $\frac{\partial^2 U}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}$ sei, also folgt durch Subtraction

$$A(B(U)) - B(A(U)) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} A_\lambda \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial U}{\partial x_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} B_\lambda \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial U}{\partial x_\mu}$$

oder

31.* $$A(B(U)) - B(A(U)) = C(U)$$

und es ist $C(U)$ eine Function derselben Art wie $A(U)$ und $B(U)$, nämlich

31.' $$C(U) = \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \qquad C_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(A_\lambda \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda} - B_\lambda \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\right)$$

Wir wollen nun die sehr wesentliche Voraussetzung machen, dass

32. $$C_\mu = 0 \quad , (\mu = 1, 2, \cdots n)$$

sei, d. h. wir wollen das Bestehen von n Bedingungsgleichungen unter den Coefficienten der Gleichungen (31.) annehmen, von der Form:

$$A_1 \frac{\partial B_\mu}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial B_\mu}{\partial x_n} - B_1 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_1} - \cdots - B_n \frac{\partial A_\mu}{\partial x_n} = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung können wir, wie zunächst bewiesen werden soll,

1) aus irgend einem bekannten Integrale einer der Gleichungen (31) ein neues Integral herleiten;

2) ein simultanes Integral von (31.) durch Integration einer gewöhnlichen Diffgleichung ermitteln.

Aus (32.) folgt

$$A(B(U)) - B(A(U)) = 0.$$

Es sei U_1 ein Integral von (31ª), welches nach einer oft angewandten Methode gefunden werden kann:

$$A(U_1) = 0.$$

Für $U = U_1$ verschwindet daher $B(A(U))$, folglich ist auch

$$A(B(U_1)) = 0$$

Es ist also der Ausdruck $B(U_1)$, falls er sich nicht auf eine Constante reducirt, ein neues Integral von (31ª). Sind

$$U_1 = a_1 \;,\; U_2 = a_2 \;\cdots\; U_{n-1} = a_{n-1}$$

die nach den Constanten aufgelösten von einander unabhängigen Integralgleichungen des zu (31ª) gehörigen Systemes

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{A_n} \tag{33.}$$

so sind auch $B(U_1) \cdots B(U_{n-1})$ Integrale von (31ª), da es ja $U_1, U_2 \cdots U_{n-1}$ sind.

Wir wollen jetzt die Diff. gleichung (31b) dadurch transformieren, dass wir an Stelle der $n-1$ Variabeln $x_1 \dots x_{n-1}$ die $n-1$ unabhängigen Lösungen $V_1, V_2 \dots V_{n-1}$ der Gleichung (31a) treten lassen, während x_n beibehalten wird. Eine solche Transformation ist stets möglich; denn wegen der Unabhängigkeit der Functionen $V_1 \dots V_{n-1}$ kann ihre Functionaldeterminante nicht inbezug auf jede Combination der $x_1 \dots x_{n-1}$ verschwinden. Wählen wir also eine solche Combination, sie sei $x_1 \dots x_{n-1}$, für welche

$$\frac{\partial(V_1 \dots V_{n-1})}{\partial(x_1 \dots x_{n-1})} \gtrless 0$$

ist, so ist die angegebene Transformation ausführbar. Wir haben:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial V}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right),$$

wobei $\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$ den inbezug auf x_n gebildeten Differentialquotienten der schon transformierten Function V bezeichnet, deren erste $n-1$ Argumente also $V_1 \dots V_{n-1}$ sind. Es folgt:

$$\mathfrak{B}(V) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{B}_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \mathfrak{B}_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{B}_i \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \mathfrak{B}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_n} + \mathfrak{B}_n \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \mathfrak{B}_n \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{B}_i \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial V_k} + \mathfrak{B}_n \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{B}(V_k) \frac{\partial V}{\partial V_k} + \mathfrak{B}_n \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right),$$

sodass (31^b) übergeht in

$$33^x.\quad \mathfrak{B}(V_1) \frac{\partial V}{\partial V_1} + \mathfrak{B}(V_2) \frac{\partial V}{\partial V_2} + \cdots\cdots + \mathfrak{B}(V_{n-1}) \frac{\partial V}{\partial V_{n-1}} + \mathfrak{B}_n \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

Wir zerspalten diese Diff. gleichung für V in die beiden folgenden:

$$34.\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{B}(V_k) \frac{\partial V}{\partial V_k} = 0;$$

damit stellen wir die Forderung, dass V nach Einführung der $V_1 \cdots V_{n-1}$ nicht mehr von x_n abhängen solte. Wir behaupten, dass (34) eine simultane Lösung der Gleichungen (31) liefert. Denn, da nach der S. 36 ff. entwickelten Theorie

$$V = \varphi(V_1, V_2, \cdots V_{n-1})$$

das allgemeine Integral von (31^a) ist, und da die Coefficienten $\mathfrak{B}(V_k)$ der Diff. gleichung (3[illegible]) Lösungen derselben Gleichung sind, so müss[en] sich auch solche Functionen φ bestimmen las[sen]

dass die particulären Integrale $B(U_k)$ in dem allgemeinen enthalten sind; es sind also die Coefficienten der Diff. gleichung (34.) Functionen von $U_1, U_2, \dots U_{n-1}$. Das zu (34) gehörige System gewöhnlicher Diff. gleichungen

$$\frac{dU_1}{B(U_1)} = \frac{dU_2}{B(U_2)} = \dots\dots = \frac{dU_{n-1}}{B(U_{n-1})} \qquad (34^x)$$

habe ein Integral

$$H(U_1, U_2, \dots U_{n-1}) = C,$$

so ist eine simultane Lösung der Diff. glen (31.)

$$U = H.$$

Denn einerseits ist nach der Erklärung H ein Integral von (34.), und da $\left(\frac{\partial H}{\partial x_n}\right) = 0$ ist, auch von (33^x), also auch von (31^b); andererseits ist H als Function von $U_1 \dots U_{n-1}$ ein Integral von (31^a). Hiermit sind die beiden Behauptungen von S. 81-82 bewiesen.

Dass die Gleichungen (32) auch notwendig sind für die Ermittelung einer simultanen Lösung der Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0,$$

wie sie jetzt kurz bezeichnet werden mögen, sieht man folgendermassen ein.

Wir stellten uns oben die Aufgabe, zu der vorgelegten Diff. gleichung $F=0$ noch $n-1$ andere, $F_1=0, \ldots F_{n-1}=0$ zu bestimmen, um aus den gesammten n Gleichungen sodann das Integral z der Gleichung $F=0$ zu finden. Diese Forderung, welche offenbar in der Existenz eines simultanen Integrales der n Gleichungen besteht, wurde durch solche Functionen $F_1 \ldots F_{n-1}$ erfüllt, welche den Bedingungen (S. 77)

$$(F_i, F_k) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \cdots n-1 \\ i \gtrless k \quad F_0 = F \end{pmatrix}$$

genügten, und diese Bedingungen waren notwendig. Es muss daher auch im vorliegenden Falle, in welchem die beiden partiellen Diff. gleichungen $A=0, B=0$ eine gemeinsame Lösung besitzen sollen, die Gl

$$(A, B) = 0$$

erfüllt sein. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial v}{\partial x_\lambda} = p_\lambda$$

$$A = A_1 p_1 + \cdots \cdots + A_n p_n$$
$$B = B_1 p_1 + \cdots \cdots + B_n p_n,$$

Folglich ist:

$$\frac{\partial A}{\partial x_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}, \quad \frac{\partial B}{\partial x_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda}, \quad \frac{\partial A}{\partial p_\lambda} = A_\lambda, \quad \frac{\partial B}{\partial p_\lambda} = B_\lambda,$$

da jetzt $x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n$ als $2n$ unabhängige Veränderliche zu betrachten sind. Hiernach erhalten wir:

$$(A, B) = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial x_\lambda} \frac{\partial B}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial B}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A}{\partial p_\lambda} \right) = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(B_\lambda \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - A_\lambda \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda} \right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \sum_{\lambda=1}^{n} \left(B_\lambda \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - A_\lambda \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\lambda} \right) = -\sum_{\mu=1}^{n} C_\mu p_\mu ;$$

da aber die Gleichung $(A, B) = 0$ identisch bestehen soll, so muss $C_\mu = 0$ sein, was bewiesen werden sollte.

Die Aufgabe, ein simultanes Integral der Diff. gleichungen (31.) zu finden, haben wir unter Voraussetzung der Jacobi-schen Bedingung (32) auf die vollständige Integration eines Systemes von $(n-1)$ gewöhnlichen Diff. gleichungen (33.) und auf die Ermittelung eines einzigen Integrales eines Systemes von $n-2$ gewöhnlichen Diff. gleichungen (34ᵃ.) zurückgeführt. Wir wollen diese Lösung noch vereinfachen.

Es sei $V_1 = a_1$ ein Integral des Systemes (33), also

$$A(V_1) = 0.$$

Bevor wir die Transformation der Gleichung $B(V) = 0$ anstellen, versuchen wir natürlich, ob V_1 nicht auch ein Integral von $B(V) = 0$, also $B(V_1) = 0$ sei, in welchem Falle V_1 die gesuchte simultane Lösung wäre. Tritt dies nicht ein, so ist $B(V_1)$, wie S. 82 bewiesen, wieder ein Integral von (31[a]), kann also in der Form $\varphi(V_1 \dots V_{n-1})$ dargestellt werden, wo $V_1 \dots V_{n-1}$ die von einander unabhängigen Integrale des Systemes (33.) bezeichnen.

Es können dabei allerdings besondere Fälle eintreten. Wenn sich $B(V_1)$ zum Beispiele auf eine von 0 verschiedene Constante reducirt, so ist $B(V_1)$ als Lösung von (33) unbrauchbar. Wenn $B(V_1)$ sich auf eine Function von V_1 allein reducirt,

$$B(V_1) = \psi(V_1),$$

so kann $B(V_1)$ niemals eine der gesuchten simultanen Lösungen sein. Denn, da dann die Diff. gleichung (31[b]) erfüllt sein müsste, so würde wegen

$$\frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \psi'(U_1)\frac{\partial U_1}{\partial x_\nu}$$

folgen:

$$B(U) = \psi'(U_1)B(U_1) = 0,$$

eine Gleichung, welche für $B(U_1) \gtrless 0$ unmöglich, da $\psi(U_1) = B(U_1)$ nach der Voraussetzung nicht constant sein soll.

Treten diese Ausnahmefälle nicht ein, so kann

$$B(U_1) = U_2$$

gesetzt werden, und es ist dann U_2 ein zweites Integral von (31ᵃ). Ist nun $B(U_2) = 0$, so ist U_2 die gesuchte simultane Lösung. Wenn nicht, so können wir wieder

$$B(U_2) = U_3$$

setzen u.s.f. Offenbar müssen wir nach einer endlichen Anzahl solcher Operationen wieder zu einer der schon erhaltenen Integrale U_i zurückkommen, da ja nur $n-1$ solche Integrale existieren. Der günstigste Fall ist der, dass sämtliche Integrale $U_1 \dots U_{n-1}$ auf diesem Wege erhalten werden, sodass, um eine oft gebrauchte symbolische Bezeichnung zu benutzen, diese Integrale sich wie folgt darstellen:

$$U_1 = U_1\ , U_2 = B(U_1)\ , U_3 = B^2(U_1), \cdots\cdots U_{n-1} = B^{n-2}(U_1).$$

Dann ist also statt der sämtlichen $n-1$ Integrale von (33) nur ein einziges zu bestimmen, während die übrigen aus diesem durch Differentiation hervorgehen.

Während nun dieser besondere Fall dann vorliegt, wenn man erst nach $(n-2)$ maliger Iteration der Operation B wieder zu dem anfänglichen Integrale zurückkehrt, wird letzteres im allgemeinen schon nach $(m-2)$ maliger Iteration der Fall sei, für $m < n$. Es sind dann

$$U_1 = U_1 \quad U_2 = B(U_1) \cdots\cdots U_{m-1} = B^{m-2}(U_1)$$

$m-1$ von einander unabhängige Lösungen von (33), während $U_m = B^{m-1}(U_1) = B(U_{m-1})$ von ihnen abhängig ist:

$$U_m = G(U_1, U_2 \cdots U_{m-1}).$$

Wir behaupten nun, dass ein Integral der Diff. gleichung

$$\sum_{k=1}^{m-1} B(U_k) \frac{\partial U}{\partial U_k} = 0$$

oder

$$U_2 \frac{\partial U}{\partial U_1} + U_3 \frac{\partial U}{\partial U_2} + \cdots\cdots + G(U_1 \cdots U_{m-1}) \frac{\partial U}{\partial U_{m-1}} = 0$$

welches also aus dem Systeme

$$\frac{dV_1}{V_2} = \frac{dV_2}{V_3} = \cdots\cdots = \frac{dV_{m-1}}{\varphi(V_1 \cdots V_{m-1})} \qquad (35.)$$

in der Form

$$K(V_1 \cdots V_{m-1}) = C'$$

erhalten wird, für V gesetzt ein simultanes Integral der Gleichungen (31.) liefert. Denn aus $V = K$ folgt offenbar

$$\frac{\partial V}{\partial V_m} = 0, \cdots\cdots \frac{\partial V}{\partial V_{n-1}} = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

und auf Grund dieser Gleichungen ist $V = K$ ein Integral von (34.), also auch von (31^b). Dass es die Diff. gleichung (31^a) befriedigt, ist von vornherein klar. – Auch in diesem Falle braucht also nur ein einziges Integral des Systemes (33.) bestimmt zu werden.

Ist $B(V_1) = V_2$ eine Function von V_1 allein, so kann, wie S. 88 gezeigt, V_2 keine simultane Lösung sein. Man könnte nur versuchen, in diesem Falle die abgekürzte Gleichung (31^b) anzusetzen, welche, da jetzt $m=2$, die Form

$$\frac{\partial V}{\partial V_1} = 0$$

haben würde nach Weglassung des Factors $B(V_1)$. Diese Gleichung lässt erkennen, dass V die Grösse V_1 nicht enthält, sodass $V=\text{Const.}$ die Lösung wäre, deren Unbrauchbarkeit ebenfalls gezeigt worden ist. Man muss also in dem vorliegenden Falle ein zweites Integral von (34^x) bestimmen.

Die von S. 79 bis hierher entwickelte Theorie der simultanen Lösungen zweier partiellen Diff. gleichungen erster Ordnung wollen wir jetzt auf die Integration des Systemes (30), d.h. zur Ermittelung der Functionen $F_1, F_2, \dots F_{n-1}$ bei gegebenem F anwenden. Wir nehmen zuerst für $n=3$ die drei Diff. gleichungen

36. a. $(F, F_1)=0$ b. $(F, F_2)=0$ c. $(F_1, F_2)=0$

von denen (a) und (b) formell identisch sind und bezeichnen

$$F=\varphi, \quad F_1=\psi, \quad F_2=\lambda$$

sodass zunächst ψ aus der Diff. gleichung

$$(36^x)\ (a)\quad (\varphi,\psi) \equiv \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial p_\lambda}\right)=0$$

zu bestimmen ist. Es ist zu bemerken, dass die gegebenen und die gesuchten Functionen von den $2n$ unabhängigen Veränderlichen

$$x_1 \dots x_n\ p_1 \dots p_n$$

abhängen, während in den Diff. gleichungen (31) nur die n Unabhängigen $x_1 \dots x_n$ auftreten. Zu (36^x) (a) gehört das System gewöhnlicher Diff. gleichungen

$$\frac{dx_1}{\varphi'(p_1)} = \frac{dx_2}{\varphi'(p_2)} = \dots = \frac{dx_n}{\varphi'(p_n)} = -\frac{dp_1}{\varphi'(x_1)} = \dots = -\frac{dp_n}{\varphi'(x_n)}$$

dessen allgemeine Integration die allgemeinste Lösung von (36^x) (a) liefern würde. Es genügt jedoch $F_1=\psi$ als eine specielle der Diff. gleichung (36^x) (a) genügende Function zu ermitteln und in (c) einzusetzen; alsdann muss $F_2=\chi$ ein simultanes Integral von

$$36^x.\qquad (b)\ (\varphi,\chi)=0 \qquad (c)\ (\psi,\chi)=0$$

sein. Um nun auf diese Diff. gleichungen unsere Untersuchungen anwenden zu können, haben wir aus

$$A(X) \equiv (\varphi, X) \qquad B(X) \equiv (\psi, X)$$

den Ausdruck $C(X)$ nach den Definitionen

$$C(V) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial V}{\partial x_\nu} \qquad C_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(A_\lambda \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\lambda} - B_\lambda \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \right)$$

zu bilden und dabei die Anzahl $2n$ sowie die neue Bezeichnung der Variabeln zu beachten. Wir setzen deshalb

$$C(X) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial X}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} C_{n+\nu} \frac{\partial X}{\partial p_\nu}$$

und benutzen die analoge Bezeichnung für $A(X)$ und $B(X)$, so wird offenbar:

$$A_\nu = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu}, \quad A_{n+\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}, \quad B_\nu = -\frac{\partial \psi}{\partial p_\nu}, \quad B_{n+\nu} = \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \cdots$$

und

$$C_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(A_\lambda \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\lambda} - B_\lambda \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \right) + \sum_{\lambda=1}^{n} \left(A_{n+\lambda} \frac{\partial B_\nu}{\partial p_\lambda} - B_{n+\lambda} \frac{\partial A_\nu}{\partial p_\lambda} \right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_\nu \partial x_\lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\nu \partial x_\lambda} \right) + \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_\nu \partial p_\lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\nu \partial p_\lambda} \right.$$

nun ist

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial p_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_\lambda \partial p_\nu} + \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\lambda \partial p_\nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\lambda \partial p_\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\lambda \partial p_\nu} \right)$$

folglich

$$C_\nu = -\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial p_\nu}, \quad (\nu = 1 \cdots n)$$

Ebenso ergiebt sich

$$C_{n+\nu} = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial x_\nu}, \qquad (\nu = 1 \cdots n)$$

aus der Gleichung

$$C_{n+\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(A_\lambda \frac{\partial B_{n+\nu}}{\partial x_\lambda} - B_\lambda \frac{\partial A_{n+\nu}}{\partial x_\lambda}\right) + \sum_{\lambda=1}^{n}\left(A_{n+\lambda}\frac{\partial B_{n+\nu}}{\partial p_\lambda} - B_{n+\lambda}\frac{\partial A_{n+\nu}}{\partial p_\lambda}\right),$$

also

$$C(\chi) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\chi}{\partial p_\nu} - \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p_\nu}\frac{\partial\chi}{\partial x_\nu}\right) = ((\varphi,\psi),\chi).$$

Ferner ist

$$A(B(\chi)) = (\varphi, B(\chi)) = (\varphi,(\psi,\chi))$$

$$B(A(\chi)) = (\psi, A(\chi)) = (\psi,(\varphi,\chi))$$

folglich auf Grund der Definition von $C(\chi)$

$$A(B(\chi)) - B(A(\chi)) = C(\chi)$$

$$(\varphi,(\psi,\chi)) - (\psi,(\varphi,\chi)) = ((\varphi,\psi),\chi)$$

und weil noch allgemein die Identitäten

$$(F_i, F_k) = -(F_k, F_i), \qquad (-F_i, F_k) = -(F_i, F_k)$$

bestehen:

37. $$((\varphi,\psi),\chi) + ((\psi,\chi),\varphi) + ((\chi,\varphi),\psi) = 0 \;^{x}$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt für alle Functionen φ, ψ, χ der $2n$ unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n\; p_1 \cdots p_n$ unter der Voraussetzung, dass die Grössen $(\varphi,\psi), \cdots\cdots$ wie angegeben erklärt werden.

x Der Satz rührt in dieser Gestalt von Donkin her.

Wird nun ψ als Lösung von (36*)(a) bestimmt, sodass $(\varphi, \psi) = 0$ ist, so folgt aus dem Jacobi'schen Satze (37):

$$((\psi, \chi), \varphi) = ((\varphi, \chi), \psi).$$

Die Gleichung $(\varphi, \psi) = 0$ ist die hinreichende Bedingung dafür, dass die Jacobi'schen Bedingungen, deren Zahl hier $= 2n$ ist, erfüllt sind, dass also ein simultanes Integral von (36*)(b),(c) existiert. Es sei nun χ ein Integral von $(\varphi, \chi) = 0$, sodass die letzte Gleichung übergeht in

$$((\psi, \chi), \varphi) = 0,$$

eine Gleichung, aus der man erkennt, dass auch (ψ, χ) eine Lösung von $(\varphi, \chi) = 0$ ist, falls sich nicht (ψ, χ) auf eine Constante reduciert. Wäre $(\psi, \chi) = 0$, so wäre χ schon die gesuchte simultane Lösung; im anderen Falle setzen wir

$$(\psi, \chi) = \chi_1 \,, \quad (\psi, \chi_1) = \chi_2 \,, \dots\dots$$

und fahren solange fort, bis wir zu einer von den vorangehenden abhängigen Grösse kommen, und es ist dann in bekannter Weise eine neue Diff.gleichung anzusetzen, deren

particuläre Integration das gesuchte simultane Integral liefert.

Um diese Methode auch mit den anderen Bezeichnungen durchzuführen, so sei gegeben

(a) $$F(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0$$

und es werde zunächst F_1 aus

$$(F, F_1) \equiv \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \frac{\partial F_1}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} \frac{\partial F_1}{\partial x_\lambda} \right) = 0,$$

d. h. als particuläre Lösung des Systemes

I $$\frac{dx_1}{F'_{(p_1)}} = \cdots = \frac{dx_n}{F'_{(p_n)}} = -\frac{dp_1}{F'_{(x_1)}} = \cdots = -\frac{dp_n}{F'_{(x_n)}}$$

bestimmt, was die Integralgleichung $F_1 = a_1$ liefern möge. Wir setzen der Deutlichkeit halber für F_1

$$F_1 \equiv G_1(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_1.$$

Infolge der Gleichung $(F, F_1) = 0$ existiert eine simultane Lösung der beiden Diff. gleichungen

(b) $(F, F_2) = 0$ (c) $(F_1, F_2) \equiv (G_1, F_2) = 0$

Zu (b) gehört offenbar dasselbe System (I.) wie zu (a), aus dem jetzt ein zweites Integral $G_2 \neq G_1$ bestimmt wird, sodass $(F, G_2) = 0$ ist. Ist nun $(G_1, G_2) = 0$, so würde G_2 die gesuchte

simultane Lösung sein; ist dies aber nicht der Fall und auch nicht (G_1, G_2) eine von Null verschiedene Constante, so setzen wir

$$(G_1, G_2) = G_3$$

und es ist dann sicher G_3 wieder ein Integral von (b.). Ist jetzt $(G_1, G_3) = 0$, so wäre also G_3 das simultane Integral. Andernfalls wird wie vorher verfahren, und wir erhalten

$$(G_1, G_3) = G_4$$

$$\cdots\cdots$$

$$G_m = \varphi(F, G_1, G_2, \ldots G_{m-1});$$

nach mindestens $2n-2$ Schritten muss man zu einem solchen Ausdrucke G_m gelangen, der von den vorhergehenden abhängig ist. Nun ist nach der allgemeinen Theorie die Diff. gleichung

$$B(F)\frac{\partial F_2}{\partial F} + B(G_1)\frac{\partial F_2}{\partial G_1} + B(G_2)\frac{\partial F_2}{\partial G_2} + \cdots\cdots + B(G_{m-1})\frac{\partial F_2}{\partial G_{m-1}} = 0$$

zu integriren. Im vorliegenden Falle ist

$$B(U) = (G_1, U)$$

also

$$B(F) = (G_1, F) = -(F, G_1) = 0\ , \quad B(G_1) = (G_1, G_1) = 0$$

folglich lautet jene Diff. gleichung

$$\mathfrak{G}_3 \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{G}_2} + \mathfrak{G}_4 \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{G}_3} + \cdots\cdots + \varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \cdots \mathfrak{G}_{m-1}) \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{G}_{m-1}} = 0.$$

Jedes Integral

$$K(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \cdots \mathfrak{G}_{m-1}) = C$$

dieser Gleichung oder des zugehörigen Systemes

$$\text{II} \qquad \frac{d\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_3} = \frac{d\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_4} = \cdots\cdots = \frac{d\,\mathfrak{G}_{m-1}}{\varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1, \cdots \mathfrak{G}_{m-1})}$$

kann für $\mathfrak{F}_2$ genommen werden.
Als erstes Beispiel sei die Diff. gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1 x_2 x_3$$

vorgelegt. Hier ist

$$\mathfrak{F} \equiv p_1 p_2 p_3 - x_1 x_2 x_3$$

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1) = p_2 p_3 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_1} + p_3 p_1 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_2} + p_1 p_2 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_3} + x_2 x_3 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial p_1} + x_3 x_1 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial p_2} + x_1 x_2 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial p_3}$$

und das System (I) lautet:

$$\frac{dx_1}{p_2 p_3} = \frac{dx_2}{p_3 p_1} = \frac{dx_3}{p_1 p_2} = \frac{dp_1}{x_2 x_3} = \frac{dp_2}{x_3 x_1} = \frac{dp_3}{x_1 x_2}$$

Wir multipliciren die drei ersten Gleichungen mit $p_1 p_2 p_3$, die drei letzten mit dem diesem Producte gleichen $x_1 x_2 x_3$:

$$p_1 dx_1 = p_2 dx_2 = p_3 dx_3 = x_1 dp_1 = x_2 dp_2 = x_3 dp_3$$

und erhalten aus $p_1 dx_1 = x_1 dp_1$ . . . .

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dp_1}{p_1} ; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \frac{p_1}{x_1} = a_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

sodass wir zunächst

$$\mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{G}_1 = \frac{p_1}{x_1}$$

setzen können.

Wir versuchen darauf, ob wir $\mathfrak{G}_2 = \frac{p_2}{x_2}$ nehmen können. Dazu muss

$$(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = \sum_{\lambda=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial p_\lambda} \right)$$

verschwinden, was in der That der Fall ist

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial p_3} = 0$$

ist. Wir setzen daher

$$\mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{G}_2 = \frac{p_2}{x_2}$$

und erhalten also

$$\mathfrak{F} \equiv p_1 p_2 p_3 - x_1 x_2 x_3 = 0 \ , \quad \mathfrak{F}_1 \equiv \frac{p_1}{x_1} = a_1 \ , \quad \mathfrak{F}_2 \equiv \frac{p_2}{x_2} = a_2$$

folglich

$$dz = a_1 x_1 dx_1 + a_2 x_2 dx_2 + \frac{x_3}{a_1 a_2} dx_3$$

und

$$z = \tfrac{1}{2} a_1 x_1^2 + \tfrac{1}{2} a_2 x_2^2 + \frac{1}{2 a_1 a_2} x_3^2 + a_3$$

als vollständiges Integral.

Während in diesem Beispiele ein zweites

Integral des Systemes (I.) die simultane Lösung liefert, ist dies nicht der Fall bei der Diff. gleichung

$$\left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1}\right) x_3 + a\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x_3} = b \ ^{x}$$

wo a, b gegebene Constanten bezeichnen. Wir haben

$$F = (x_1 p_2 + x_2 p_1) x_3 + a(p_1 - p_2) p_3 - b;$$

das zur Bestimmung von F_1 nach der Gleichung $(F, F_1) = 0$ anzusetzende System (I.) lautet

$$\text{(I.)} \quad \frac{dx_1}{x_2 x_3 + a p_3} = \frac{dx_2}{x_3 x_1 - a p_3} = \frac{dx_3}{a(p_1 - p_2)} = \frac{-dp_1}{p_2 x_3} = \frac{-dp_2}{p_1 x_3} = \frac{-dp_3}{x_1 p_2 + x_2 p_1}$$

Hieraus folgt

$$dx_1 = \lambda(x_2 x_3 + a p_3) \qquad dx_2 = \lambda(x_1 x_3 - a p_3)$$

$$dp_1 = -\lambda x_3 p_2 \qquad dp_2 = -\lambda x_3 p_1$$

$$dx_1 + dx_2 = \lambda x_3 (x_1 + x_2) \qquad dp_1 + dp_2 = -\lambda x_3 (p_1 + p_2)$$

$$\frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2} + \frac{dp_1 + dp_2}{p_1 + p_2} = 0,$$

woraus sich das Integral

$$F_1 = G_1 \equiv (x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = a_1$$

ergiebt. Es ist jetzt die wegen $(F, G_1) = 0$ existierende <u>simultane</u> Lösung F_2 der

x Imschenetskij, Archiv für Math. und Physik, Bd. 50.

Diff. gleichungen

$$(F, F_2) = 0 \quad , (G_1, F_2) = 0$$

zu ermitteln. Statt nun nach einer weite[ren]
integrablen Combination der Gleichungen (I)
zu suchen, setzen wir zur Bestimmung von
F_2 die Diff. gleichung (G_1, F_2) an:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial p_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{\partial G_1}{\partial p_1} + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}\frac{\partial F_2}{\partial p_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{\partial G_1}{\partial p_2} = 0,$$

zu welcher das System

$$\frac{dx_1}{x_1+x_2} = \frac{dx_2}{x_1+x_2} = \frac{-dp_1}{p_1+p_2} = \frac{-dp_2}{p_1+p_2}$$

mit der Integralgleichung

$$H_2 \equiv p_1 - p_2 = c$$

gehört. Wir könnten $H_2 = F_2$ setzen, wenn
$(F, H_2) = 0$ wäre. Es ist aber

$$(F, H_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial H_2}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial H_2}{\partial p_2} = x_3 p_2 - x_3 p_1$$

von Null verschieden jedoch ist jedenfall[s]
(F, H_2) ein neues Integral von $(G_1, F_2) = 0$, wie
auch eine leichte Probe zeigt.
Wir setzen jetzt

$$(F, H_2) = -x_3(p_1 - p_2) = -x_3 H_2 = H_3$$

und bilden weiter $H_4, H_5 \cdots\cdots$: eine Reih[e]

bei welcher schliesslich eine Grösse H_m erhalten werden muss, welche von den vorangehenden abhängig ist. Zur Ergänzung der allgemeinen Untersuchungen wollen wir aber zeigen, dass man im allgemeinen nicht zu einem verschwindenden (F, H_m) kommt, sodass also H_m als das gesuchte simultane Integral angenommen werden könnte.
Die simultanen Diff. gleichungen der n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ seien

$$A(U)=0 \quad , \quad B(U)=0$$

U_1 sei ein particuläres Integral der ersten Gleichung, ebenso $B(U_1)$. Ist $B(U_1) \gtrless 0$, so bilden wir die Reihe

$$U_1 \quad , U_2 = B(U_1), \quad U_3 = B(U_2), \quad \dots\dots U_m = B(U_{m-1}) = \varphi(U_1 \dots U_{m-1})$$

Es ist nun nach den Definitionen:

$$B(U_m) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial U_m}{\partial x_\nu} \quad , \quad \frac{\partial U_m}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{\partial U_m}{\partial U_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}$$

folglich

$$B(U_m) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial U_m}{\partial U_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu=1}^{m-1} B(U_\mu) \frac{\partial U_m}{\partial U_\mu}$$

oder, anders geschrieben

$$U_{m+1} = \sum_{\mu=1}^{m-1} U_{\mu+1} \frac{\partial U_m}{\partial U_\mu}$$

Hierin ist nun $\frac{\partial V_m}{\partial V_\mu}$ wie V_m selbst, eine Function von $V_1 \cdots V_{m-1}$; $V_{\mu+1}$ $(\mu = 1 \cdots m-1)$ ist eine der Grössen $V_2 \cdots V_m$, hat also dieselbe Eigenschaft. Gleiches gilt also auch von V_{m+1}, eine Grösse, die folglich im allgemeinen nicht null ist.

In unserem Beispiele ist nun weiter:

$$(F, H_3) = H_4 = F'_{(x_1)} \frac{\partial H_3}{\partial p_1} + F'_{(x_2)} \frac{\partial H_3}{\partial p_2} - F'_{(p_3)} \frac{\partial H_3}{\partial x_3}$$

$$= x_3^2 (p_1 - p_2) + a (p_1 - p_2)^2$$

$$H_4 = \frac{H_3^2}{H_2} + a H_2^2$$

Da also H_4 von H_2, H_3 abhängig ist, so bilden wir die Diff. gleichung

$$(F, H_2) \frac{\partial F_2}{\partial H_2} + (F, H_3) \frac{\partial F_2}{\partial H_3} = 0,$$

nämlich:

$$H_3 \frac{\partial F_2}{\partial H_2} + \left(\frac{H_3^2}{H_2} + a H_2^2 \right) \frac{\partial F_2}{\partial H_3} = 0$$

Die zugehörige gewöhnliche Diff. gleichung lautet

$$\frac{dH_2}{H_3} = \frac{dH_3}{\frac{H_3^2}{H_2} + a H_2^2}$$

oder

$$\frac{dH_3}{dH_2} = \frac{H_3}{H_2} + a \frac{H_2^2}{H_3};$$

sie geht durch die Substitution

$$H_3 = y\, H_2$$

über in die Diff. gleichung

$$H_2 \frac{dy}{dH_2} = a\, \frac{H_2}{y},$$

aus welcher durch Integration

$$\tfrac{1}{2}\, y^2 = a H_2 + C$$

folgt, also

$$\frac{1}{2}\, \frac{H_3^2}{H_2^2} - a\, H_2 = C$$

$$\tfrac{1}{2}\, x_3^2 - a(p_1 - p_2) = C$$

Es sei $C = -a_2$, so ist

$$F_2 \equiv a(p_1 - p_2) - \tfrac{1}{2} x_3^2 = a_2$$

das gesuchte simultane Integral. Wir nehmen jetzt

$$F = 0 \quad , \quad F_1 = a_1 \quad , \quad F_2 = a_2$$

zusammen. Aus den beiden letzten ergiebt sich bezw.

$$p_1 + p_2 = \frac{a_1}{x_1 + x_2} \qquad p_1 - p_2 = \frac{x_3^2}{2a} + \frac{a_2}{a}$$

folglich

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_3^2}{2a} + \frac{a_2}{a}\right), \quad p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{x_1 + x_3} - \frac{x_3^2}{2a} - \frac{a_2}{a}\right);$$

die Einsetzung dieser Werte in $F = 0$ giebt:

$$\frac{1}{2}\left\{a_1 + \left(\frac{x_3^2}{2a} + \frac{a_2}{a}\right)(x_2 - x_1)\right\}x_3 + \left(\frac{x_3^2}{2} + a_2\right)p_3 = b,$$

und es kommt:

$$2\,dz = \frac{a_1(dx_1+dx_2)}{x_1+x_2} + \left(\frac{x_3^2}{2}+a_2\right)\frac{dx_1-dx_2}{a} + \frac{2b-a_1x_3}{\frac{1}{2}x_3^2+a_2}dx_3 - \frac{x_3}{a}(x_2-x_1)$$

folglich, nach geeigneter Zusammenfassung

$$2z = a_1\log(x_1+x_2) + \frac{1}{a}(x_1-x_2)\left(\tfrac{1}{2}x_3^2+a_2\right) + \int\frac{2b-a_1x_3}{x_3^2+a_2}dx_3$$

Die rechtsstehende Integralfunction führt auf Kreisfunctionen und Logarithmen; sie enthält die willkürliche Constante, welche dieses Integral der vorgelegten Diff. gleichung als vollständiges charakterisiert.

Nachdem die drei ersten Gleichungen des Systemes (30.) integriert sind, was durch die S. 93 ff. entwickelten Methoden geschieht, ist es nicht schwer, das ganze System zu integrieren für $n=3$. Nehmen wir zu den Diff. gleichungen (36.) die drei folgenden hinzu

38. (a.) $(F, F_3)=0$ (b.) $(F_1, F_3)=0$ (c) $(F_2, F_3)=0$

Es existieren nun sicher simultane Integr[ale] für (a), (c) und für (b), (c) weil die für die Existenz notwendigen und hinreichenden

Bedingungen

$$(F, F_2) = 0 \quad (F_1, F_2) = 0$$

wegen (36) erfüllt sind. Wir haben aber zu untersuchen, ob für alle drei Gleichungen ein simultanes Integral existiert.
In (38) sind F, F_1, F_2 nach Integration von (36) als bekannt anzusehen. Es sei nun ein simultanes Integral $F_3 = \bar{G}_3$ von (a), (b) ermittelt; wir bilden

$$(F_2, \bar{G}_3) = \bar{G}_4$$

Ist $G_4 = 0$, so ist $\bar{G}_3$ das gesuchte simultane Integral von (38); ist $\bar{G}_4$ eine von Null verschiedene Constante, so ist ein anderes simultanes Integral von (a) und (b) zu bestimmen; ist beides nicht der Fall, so ist sicher $\bar{G}_4$ ebenfalls ein simultanes Integral von (a) und (b), und wir bilden weiter

$$(F_2, \bar{G}_4) = \bar{G}_5 \quad \ldots\ldots\ldots$$

Es ist nach den früheren Entwicklungen klar, dass man auf diese Weise entweder zu

einer verschwindenden Function $\bar{G}_r$ kommen muss, sodass $\bar{G}_{r-1}$ das simultane Integral sofort gegeben ist, oder zu einer von den vorangehenden abhängigen Functio[n]

$$\bar{G}_m = \psi(G_3, \bar{G}_4 \cdots G_{m-1});$$

in letzterem Falle ist eine neue Diff.-gleich[ung] anzusetzen, auf die wir noch kurz eingehen wollen. Das System (I), aus welchem F_1 bestimmt wird, enthält $2n-1$ Diff. gleichung[en], das System (II) für F_2 enthält weniger Gleichungen; in gleicher Weise erniedrig[t] sich die Anzahl der Gleichungen des Systemes, welches zu der in Rede stehende[n] Diff.-gleichung für F_3 gehört. Beachten wir nämlich zunächst, dass ausser $\bar{G}_3 \cdots$ von vornherein F, F_1, F_2 als specielle Lösungen von (38) (a), (b) bekannt sind, welch[e] sie teils identisch, teils wegen (36) befriedige[n], wir müssen daher schreiben:

$$\bar{G}_m = \varphi(F, F_1, F_2, \bar{G}_3 \cdots \bar{G}_{m-1}).$$

$\bar{G}_m$ ist eine Lösung der Gleichung $(F, F_3) = 0$,

welche nach der Definition des Symbols (F, F_3) nur $2n-1$ unabhängige Lösungen haben kann; nach höchstens $2n-4$ Operationen müssen wir also zu $\bar{G}_m$ gelangen, da die drei ersten Integrale F, F_1, F_2 auszunehmen sind.
Die homogene Diff. gleichung für F_3 hat nach der allgemeinen Theorie, wenn $B(V) = (F_2, V)$ gesetzt wird, die Form:

$$B(F)\frac{\partial F_3}{\partial F} + B(F_1)\frac{\partial F_3}{\partial F_1} + B(F_2)\frac{\partial F_3}{\partial F_2} + B(\bar{G}_3)\frac{\partial F_3}{\partial \bar{G}_3} + \cdots + B(\bar{G}_{m-1})\frac{\partial F_3}{\partial \bar{G}_{m-1}} = 0$$

Hierin ist nun teils identisch, teils wegen (36),

$$(F_2, F) = 0 \quad , \quad (F_2, F_1) = 0 \quad , \quad (F_2, F_2) = 0$$

also lautet das zugehörige System gewöhnlicher Diff. gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{G}_3}{B(\bar{G}_3)} = \cdots\cdots = \frac{\partial \bar{G}_{m-1}}{B(\bar{G}_{m-1})},$$

und die Anzahl dieser Gleichungen ist höchstens $= 2n-5$. Dies ist das gewünschte Resultat.
Es ist klar, dass ein genau analoges Verfahren für $n > 3$ zum Ziele führt. Bei jedem Schritte verringert sich die

Anzahl der gewöhnlichen Diff. gleichungen welche eventuell! noch zu integrieren sind. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen, sondern nur noch zeigen, dass die Bestimmungsgleichungen (30) durch einen passenden Ansatz der Functionen F_i noch vereinfacht werden können.

Es werde angenommen, dass die vorgelegte Diff. gleichung (24), $F = 0$ nach einer der Grössen $p_1 \cdots p_n$, etwa nach p_1 auflösbar sei:

$$G_1 \equiv p_1 - f_1(x_1 \cdots x_n \, p_2 \cdots p_n) = 0.$$

Es sei dann auf irgend einem Wege F_1 ermittelt, und es werde der Wert von p_1 aus vorstehender Gleichung in $F_1 - a_1 = 0$ eingesetzt, sodass diese Function nicht mehr von p_1 abhängt. Letztere sei nun bei passender Bezeichnung der p nach p_2 auflösbar:

$$G_2 \equiv p_2 - f_2(x_1 \cdots x_n \, p_3 \cdots p_n \, a_1) = 0.$$

Wir fahren so fort, indem wir $F_2 = a_1$ bestimmen darin p_1 und p_2 einsetzen und darin nach p_3 auflösen. Es ergiebt sich auf diese Weise noch

$$\mathcal{G}_3 \equiv p_3 - f_3(x_1 \cdots x_n\; p_4 \cdots p_n\; a_1\, a_2) = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\mathcal{G}_i \equiv p_i - f_i(x_1 \cdots x_n\; p_{i+1} \cdots p_n\; a_1 \cdots a_{i-1}) = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\mathcal{G}_n \equiv p_n - f_n(x_1 \cdots x_n\; a_1 \cdots\cdots a_{n-1}) = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung für dz kann, wie wir bewiesen haben, durch die Gleichungen

$$(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_k) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n,\; k > i)$$

oder

$$(p_i - f_i, p_k - f_k) = 0$$

ersetzt werden, wo

$$(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{G}_k}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \mathcal{G}_k}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial p_\nu} \right)$$

ist. Da $x_1 \cdots x_n\; p_1 \cdots p_n$ hier als unabhängige Variable zu betrachten sind, so ist

$$\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial p_\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < i \\ 1 & \text{„} \quad \nu = i \\ -\dfrac{\partial f_i}{\partial p_\nu} & \text{„} \quad \nu > i, \end{cases}$$

folglich:

$$(p_i - f_i, p_k - f_k) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial f_k}{\partial p_\nu} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \sum_{\nu=i+1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_\nu} \frac{\partial f_i}{\partial p_\nu}.$$

Wir haben hier nur $2+(n-k)+(n-i)=2n-k-i+2$ Glieder, während im allgemeinen die Summe (G_i, G_k) $2n$ Glieder enthält; und ferner wird wegen $k>i$ nur nach den Veränderlichen

$$x_i, x_{i+1} \dots x_n;\ p_{i+1} \dots p_n,$$

d.h. nur nach $2(n-i)+1$ Veränderlichen differentiert.
Wir können noch schreiben:

$$(p_i-\mathfrak{f}_i, p_k-\mathfrak{f}_k)=\frac{\partial \mathfrak{f}_k}{\partial x_i}-\frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial x_k}-\sum_{\nu=i+1}^{k} \frac{\partial \mathfrak{f}_k}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial p_\nu}+\sum_{\nu=k+1}^{n}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathfrak{f}_k}{\partial p_\nu}-\frac{\partial \mathfrak{f}_k}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial p_\nu}\right).$$

Weiter wollen wir diesen speciellen Fall nicht verfolgen. Die formale Vereinfachung welche bei ihm dadurch eintritt, dass die Anzahl der in den Gleichungen auftretenden Veränderlichen noch von der Stelle der betreffenden Gleichung abhängt, dass also in allen Gleichungen nicht gleich viele Veränderliche auftreten, bewirkt andererseits oft noch eine Schwierigkeit der Integration selbst, wodurch noch weitere Transformationen erforderlich werden. Eine ausführlichere Darstellung findet sich bei Imschenetskij a.
Wir gehen jetzt zu der Integration eines Systemes partieller Diff.gleichungen erster Ordnung über.

Es seien n Diff. gleichungen erster Ordnung vorgelegt, welche die abhängige Variable z nicht explicite enthalten (vgl. S. 72) und aus denen z als Function der n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2 \cdots x_n$ berechnet werden soll:

$$39. \quad \begin{cases} F_1(x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0 \end{cases}$$

Es muss vorausgesetzt werden, dass diese Gleichungen mit einander vereinbar und inbezug auf $p_1 \cdots p_n$ von einander unabhängig seien; letzteres ist erfüllt, wenn

$$39'. \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right| = D \qquad (i, k = 1 \cdots n)$$

von Null verschieden ist für alle Wertsysteme $(x_1 \cdots x_n)$. Da nun aus (39) die Grössen $p_1 \cdots p_n$ bei $D \neq 0$ bestimmt und in

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

eingesetzt werden können, so müssen nach unseren letzten Untersuchungen die Bedingungen

$$39''. \quad (F_i, F_k) = 0 \quad , \quad (i = 1 \cdots n,\ k > i)$$

erfüllt sein, und zwar entweder identisch oder mit Hinzunahme der Gleichungen (39.). Die Bedingungen (39'.), (39''.) sind notwendig und hinreichend für die Existenz eines simultanen Integrales des vorgelegten Systemes.

Von grösserer Bedeutung ist der Fall, wo weniger als n Gleichungen vorgelegt sind:

$$40. \quad \begin{cases} F_1(x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n) = 0 \end{cases} \qquad (m < n).$$

Zur Bestimmung von $p_1 \dots p_n$ müssen die Gleichungen

$$40^{(a)} \quad \begin{cases} F_{m+1}(x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n) = 0 \end{cases}$$

hinzugenommen werden, und zwar so, dass die Integrabilitätsbedingungen

$$(F_i, F_k) = 0 \qquad (i = 1 \dots n,\ k > i)$$

erfüllt sind. Es können nun zwei Fälle eintreten. Der erste Fall ist der, dass die

letzteren Bedingungen, soweit sie sich auf die gegebenen Diff. gleichungen beziehen, d. h. die Gleichungen

$$(F_i, F_k) = 0 \quad , \quad (i = 1 \cdots m, \ k > i),$$

schon an sich, d. h. entweder identisch oder mit Zuhülfenahme der Gleichungen (40.) erfüllt sind. Diesen Fall wollen wir vorerst ins Auge fassen. Die Gleichungen (40^a.) können dann folgendermassen bestimmt werden: Zuerst wird F_{m+1} aus den Diff. gleichungen

$$(F_1, F_{m+1}) = 0 \quad (F_2, F_{m+1}) = 0 \quad \cdots\cdots (F_m, F_{m+1}) = 0$$

bestimmt, was stets möglich ist, weil diese Diff. gleichungen auf Grund von (40.) ein simultanes Integral besitzen (vgl. S.   ); es wird darauf F_{m+2} aus den Diff. gleichungen

$$(F_1, F_{m+2}) = 0 \cdots (F_m, F_{m+2}) = 0, \ (F_{m+1}, F_{m+2}) = 0$$

ermittelt, u. s. f.; endlich F_n aus

$$(F_1, F_n) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (F_{n-1}, F_n) = 0$$

wo also F_{n-1} aus den vorhergehenden

Gleichungen als bestimmt gedacht wird. Wir wissen nun aus der Herleitung der Jacobi-schen Bedingungen, dass wir an die Stelle der Gleichungen (40^a) auch das folgende System treten lassen können:

$$(40^b.)\quad \begin{cases} F_{m+1}(x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = a_1\,, \\ F_{m+2}(x_1 - - - - - - p_n) = a_2\,, \\ - - - - - - - \\ F_n\ (x_1 - - - - - - p_n) = a_{n-m}\,, \end{cases}$$

was jetzt geschehen soll. Das Differentia[l] dz enthält alsdann $n-m$ Constanten, folgl[ich] $n-m+1$ Constanten. Eine solche Function wird als „vollständiges Integral" des vorgelegten Systemes bezeichnet.
Dieser erste Fall tritt z. B. bei folgendem Systeme ein, wo

$$m = 3\,, \quad n = 4$$

ist:

$$F_1 \equiv 2x_2x_4^2p_1 + x_3^2x_4p_4 - x_3^2 = 0$$
$$F_2 \equiv 2x_2p_2 - x_4p_4 - 1 = 0$$
$$F_3 \equiv x_2x_4^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 - x_1x_3 = 0\,.$$

Es ist hier

$$(F_i, F_k) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_1} + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_2} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3}\frac{\partial F_k}{\partial p_3} + \frac{\partial F_i}{\partial x_4}\frac{\partial F_k}{\partial p_4}$$
$$- \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\frac{\partial F_i}{\partial p_1} - \frac{\partial F_k}{\partial x_2}\frac{\partial F_i}{\partial p_2} - \frac{\partial F_k}{\partial x_3}\frac{\partial F_i}{\partial p_3} - \frac{\partial F_k}{\partial x_4}\frac{\partial F_i}{\partial p_4} = 0$$

zu setzen; von diesen Bedingungen sind die beiden $(F_1, F_2) = 0, (F_2, F_3) = 0$ identisch, $(F_1, F_3) = 0$ auf Grund der gegebenen Gleichungen erfüllt. In der That ist

$$(F_1, F_2) = 2x_4^2 p_1 \cdot 2x_2 + (4x_2x_4p_1 + x_3^2 p_4)(-x_4) + p_4 x_3^2 x_4 \equiv 0$$

$$(F_1, F_3) = (2x_3x_4p_4 - 2x_3)\, x_2 x_4^2 + (4x_2x_4p_1 + x_3^2 p_4)\, x_1 x_3 x_4$$
$$- (x_3x_4p_4 - x_3)\, 2x_2x_4^2 - (2x_2x_4p_3 + x_1x_3p_4)\, x_3^2 x_4$$
$$= 2x_1x_3 F_1 - 2x_3^2 F_3 = 0$$

$$(F_2, F_3) = -p_4 \cdot x_1x_3x_4 - x_4^2 p_3 \cdot 2x_2 - (2x_2x_4p_3 + x_1x_3p_4)(-x_4) \equiv 0.$$

Die gegebenen Gleichungen können so geschrieben werden, dass sie in einer übersichtlicheren Form erscheinen. Indem wir die linken Seiten ebenfalls durch F_1, F_2, F_3 bezeichnen, können wir setzen:

(a.) $$F_1 \equiv p_1 + \frac{x_3^2}{2x_2x_4} p_4 - \frac{x_3^2}{2x_2x_4^2} = 0$$

(b.) $$F_2 \equiv p_2 - \frac{x_4}{2x_2} p_4 - \frac{1}{2x_2} = 0$$

(c.) $$F_3 \equiv p_3 + \frac{x_1x_3}{x_2x_4} p_4 - \frac{x_1x_3}{x_2x_4^2} = 0$$

Die hinzuzunehmende Function $F_4 = F$ braucht nur die Ableitung p_4 zu enthalten, da alsdann aus ihr p_4 als Function von x_1, x_2, x_3, x_4 entnommen und in (a), (b), (c) eingesetzt werden kann. Es kommt also darauf an, $F_4(x_1, \cdots x_4, p_4)$ aus

$$(F_1, F_4) = 0, \quad (F_2, F_4) = 0, \quad (F_3, F_4) = 0$$

zu bestimmen, Gleichungen, welche auf Grund der gegebenen Gleichungen ein simultanes Integral besitzen. Nun ist offenbar $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, p_4) = F(x_1, x_2, x_3, x_4, p_4)$ gesetzt:

$$(F_i, F) = \frac{\partial F_i}{\partial x_4}\frac{\partial F}{\partial p_4} - \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial p_4}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_4},$$

da $\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = 1$ ist. Wir haben also die Diff. gleichungen

$$(\alpha) \qquad -(F_1, F) = \left(\frac{x_3^2}{2x_2x_4^2}p_4 - \frac{x_3^2}{x_2x_4^3}\right)\frac{\partial F}{\partial p_4} + \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{x_3^2}{2x_2x_4}\frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

$$(\beta) \qquad -(F_2, F) = \frac{p_4}{2x_2}\frac{\partial F}{\partial p_4} + \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{x_4}{2x_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

$$(\gamma) \qquad -(F_3, F) = \left(\frac{x_1x_3}{x_2x_4^2} - \frac{2x_1x_3}{x_2x_4^3}\right)\frac{\partial F}{\partial p_4} + \frac{\partial F}{\partial x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2x_4}\frac{\partial F}{\partial x_4} = 0.$$

Zu (β.) der einfachsten dieser Gleichungen gehört das System

$$(A.) \qquad \frac{dp_4}{p_4}\cdot 2x_2 = dx_2 = -\frac{dx_4}{x_4}\cdot 2x_2 = \frac{dx_1}{0} = \frac{dx_3}{0},$$

wenn wir beachten, dass F alle unabhängigen Variabeln enthält. Wir haben die Integrale

$$\frac{p_4}{x_2} = \bar{C}\;, \quad x_4 p_4 = C\;, \quad x_1 = C'\;, \; x_3 = C''$$

und setzen der Einfachheit wegen $G_1 = x_4 p_4$. Es ist alsdann

$$G_2 = -(F_3, G_1) = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4^2}\left(p_4 - \frac{2}{x_4}\right) x_4 + \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4} p_4$$

$$= \frac{2 x_1 x_3}{x_2 x_4}\left(p_4 - \frac{1}{x_4}\right),$$

oder, wenn der Factor 2 als wegen der Homogeneität der Grössen (F_i, F_k) unwesentlich fortgelassen wird:

$$G_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4^2}(x_4 p_4 - 1)\;;$$

$$G_3 = -(F_3, G_2) = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4^2}\left(p_4 - \frac{2}{x_4}\right) + \frac{x_1}{x_2 x_4^2}(x_4 p_4 - 1)$$

$$+ \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4}\left(-\frac{x_1 x_3 p_4}{x_2 x_4^2} + \frac{2 x_1 x_3}{x_2 x_4^3}\right)$$

$$= \frac{x_1}{x_2 x_4^2}(x_4 p_4 - 1) = \frac{G_2}{x_3}.$$

Es ist also bei G_3 stehen zu bleiben.
Wir sehen x_1, x_3, G_1, G_2 als die unabhängigen Integrale von (A) – oder (B) – an, und setzen daher die Diff. gleichungen

$$B(x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + B(x_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + B(G_1)\frac{\partial F}{\partial G_1} + B(G_2)\frac{\partial F}{\partial G_2} = 0,$$

wobei $B(U) = -(\mathfrak{F}_3, U)$ ist, also:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_3} + \mathfrak{G}_2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{G}_1} + \mathfrak{G}_3 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{G}_2} = 0.$$

Aus den zugehörigen gewöhnlichen Diff. Gle[ichungen]

(B.) $$dx_3 = \frac{d\mathfrak{G}_1}{d\mathfrak{G}_2} = \frac{d\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_2 : x_3}$$

folgt

$$\frac{d\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_2} = \frac{dx_3}{x_3}, \quad \mathfrak{G}_2 = C x_3.$$

Es ist also

$$\frac{\mathfrak{G}_2}{x_3} = \mathfrak{G}_3$$

eine simultane Lösung von (b) und (c), mit der wir jetzt, $\mathfrak{G}_3 = H_1 = \frac{x_1}{x_2 x_4^2}(x_4 p_4 - 1)$ setzend, in (a) eingehen:

$$H_2 = -(\mathfrak{F}_1, H_1) = \frac{x_3^2}{2x_2x_4^2}\left(p_4 - \frac{2}{x_4}\right)\frac{x_1}{x_2x_4} + \frac{1}{x_2x_4^2}(x_4p_4 - 1) + \frac{x_3^2}{2x_2x_4}\left(-\frac{x_4}{x_2x_4^2}p_4 \ldots\right.$$

$$= \frac{1}{x_2x_4^2}(x_4p_4 - 1) = \frac{H_1}{x_1},$$

also ist diese simultane Lösung von (b), (c) schon von vorher erhaltenen abhängig.
Es ist daher unter $-B(H_1)$ die Operation $-(\mathfrak{F}, \ldots$ verstanden, die Diff. gleichung

$$B(x_1)\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial H_1} + B(H_1)\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial H_1} = 0$$

zu bilden, welche das simultane Integral

liefern muss:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{H_1}{x_1}\frac{\partial F}{\partial H_1} = 0$$

Aus der zugehörigen gewöhnlichen Diff. Gl.

(C) $$dx_1 = \frac{dH_1}{H_1} x_1$$

folgt $H_1 = C x_1$, oder

$$H_2 = C$$

H_2 befriedigt die Diff. gleichung (a) und nach der Herleitung auch (b) und (c). Es ist also

$$\frac{x_4 p_4 - 1}{x_2 x_4^2} = F$$

zu setzen. Wir bezeichnen $C = a$ und erhalten:

$$p_4 = a x_2 x_4 + \frac{1}{x_4}$$

$$p_1 = \frac{x_3^2}{2x_2x_4^2}(1 - x_4 p_4) = -\frac{a}{2}x_3^2$$

$$p_2 = \frac{1}{2x_2}(1 + x_4 p_4) = \frac{1}{2x_2}(a x_2 x_4^2 + x_2)$$

$$p_3 = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4^2}(1 - x_4 p_4) = -a x_1 x_3$$

$$dz = -\tfrac{1}{2} a x_3^2 dx_1 + \left(\tfrac{1}{2} a x_4^2 + \frac{1}{x_2}\right) dx_2 - a x_1 x_3 dx_3 + \left(a x_2 x_4 + \frac{1}{x_4}\right) dx_4$$

$$= -\tfrac{1}{2} a\, d(x_1 x_3^2) + \tfrac{1}{2} a\, d(x_2 x_4^2) + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_4}{x_4},$$

$$z = \tfrac{1}{2} a (x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2) + \log(x_2 x_4) + a'.$$

Dies ist mit zwei willkürlichen Constanten das vollständige Integral des gegebenen Systemes dreier simultaner Diff. gleichungen mit vier unabhängigen Variabeln.

Der zweite von den S. 115 unterschiedenen Fällen tritt ein, wenn die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Integrabilitätsbedingungen nicht identisch oder auf Grund der vorgelegten Diff. Gl.^e (40.) erfüllt sind. Da diese aber für die Existenz eines simultanen Integrales notwendig sind, so ist es erforderlich, diejenigen Bedingungen, welche nicht erfüllt sind, zu dem gegebenen Systeme hinzuzunehmen. Die so hinzuzunehmenden Bedingungsgleichungen seien

$$41. \qquad F_{m+1} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad F_{m+l} = 0,$$

wo also $F_{m+1} = (F_\lambda, F_\mu)$, $F_{m+2} = (F_{\lambda'}, F_{\mu'})$ ------ und (λ, μ), (λ', μ') ------ l Combinationen der Zahlen $i, \kappa = 1 \dots m$, $i \neq \kappa$, bezeichnen.

Es ist jetzt zu unterscheiden, ob $m+l \gtreqless n$ ist. Im ersten Falle $m+l > n$ existiert nur unter besonderen Voraussetzungen eine simulta-

Lösung, weil die p_i überbestimmt sind, — ein Fall, welchen wir als für das Integrationsproblem unwesentlich ausser Acht lassen.
Wenn $m+l \gtrless n$ ist, so muss man bei der Untersuchung des Gesamtsystemes ebenso verfahren, wie es vorher mit (40) geschah, d. h. man muss untersuchen, ob die Functionen

$$41.^x \qquad (F_i, F_k) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots m+l,\ k > i)$$

verschwinden oder nicht.
(Für $m+l=n$ dürfen keine neuen Bedingungsgleichungen hinzutreten.)
Es sind hier ebenso wie bei dem Ansatze der Gleichungen (41) gewisse specielle Fälle bemerkenswert. Es könnte dort z. B. eine der (F_i, F_k) eine von Null verschiedene Constante werden; dann haben die Gl^en (40) keine simultane Lösung, weil (F_i, F_k) nicht $=0$ gesetzt werden kann, es sind dann also die vorgelegten Diff. gleichungen in dem oben gekennzeichneten Sinne unvereinbar.
Ferner könnte eine der Grössen (F_i, F_k) als eine Function $\varphi(x_1 \cdots x_n, F_1 \cdots F_m)$ erscheinen, die dann mit Hülfe der Gl^en (40) in die

Form $\psi(x_1 \cdots x_n)$ gesetzt werden könnte, oder es könnte (F_i, F_k) von vornherein diese letztere Form haben: in beiden Fällen kann keine simultane Lösung des Systemes (40) existieren, weil eine Gleichung $\psi(x_1 \cdots x_n) = 0$ eine Beziehung zwischen den als unabhängig angenommenen Variabeln $x_1 \cdots x_n$ festsetzen würde. Im allgemeinen treten infolge der Bedingungen (41^x) wieder neue Gleichungen zu (40) hinzu, und mit dem resultierenden Gesamtsysteme wird nun dieselbe Operation wiederholt, u. s. f. Wir wollen nun den Fall ausser Betracht lassen dass bei irgend einem Stadium eine Unvereinbarkeit eintritt. Es mögen im ganzen r Gl-en auf diese Weise nach und nach hinzutreten, so dass sich schliesslich das System

42. $$F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \quad \cdots\cdots \quad F_{m+r} = 0$$

ergiebt. Ist dann $m+r = n$, so ist das simultane Integral sofort angebbar; der Fall $m+r > n$ kann wie dieser ausser Betracht bleiben. Es sei $m+r < n$, so sind noch $n-(m+r)$ Gl-en mit ebensovielen willkürlichen Constanten

42'. $\mathfrak{F}_{m+r+1} = a_1 \cdots\cdots \mathfrak{F}_n = a_{n-(m+r)}$

hinzuzunehmen. Die erste von ihnen z. B. $\mathfrak{F}_{m+r+1}$ wird aus den Gl'en

$$(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_{m+r+1}) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (\mathfrak{F}_{m+r}, \mathfrak{F}_{m+r+1}) = 0$$

bestimmt, welche auf Grund der vorhergehenden $m+r$ Gl'en eine simultane Lösung besitzen; aus ähnlichen Gruppen simultaner homogener partieller Diff. gl'en bestimmen sich $\mathfrak{F}_{m+r+2}, \cdots \mathfrak{F}_n$.
Es möge noch darauf hingewiesen werden, dass bei diesen Rechnungen noch Vereinfachungen eintreten können. Schon bei der Bildung des Systemes (41) tritt es häufig ein, dass einige der Grössen $(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_k) = C.\mathfrak{F}_h$ ist, wo C eine Constante, $\mathfrak{F}_h = 0$ eine der Gl'en (40) ist; es ist dann also die Bedingung $(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_k) = 0$ von selbst erfüllt. Ferner hat man bei der Aufstellung der Gl'en (42) z. B.

$$(\mathfrak{F}_{m+1}, \mathfrak{F}_i) = ((\mathfrak{F}_\lambda, \mathfrak{F}_\mu), \mathfrak{F}_i).$$

Nun ist aber nach (37) S. 95:

$$((F_\lambda, F_\mu), F_i) + ((F_\mu, F_i), F_\lambda) + ((F_i, F_\lambda), F_\mu) = 0.$$

Wenn daher aus den schon angesetzten Gl-en hervorgeht, dass $(F_\mu, F_i) = 0$ und $(F_i, F_\lambda) = 0$ ist, so braucht die Gleichung $(F_{m+1}, F_i) = 0$ nicht mehr in (42') aufgenommen zu werden, da sie von selbst erfüllt ist. Wir wollen diesen zweiten Fall durch folgendes Beispiel illustrieren:

(a) $$\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_2 x_4 \quad \text{oder} \quad F_1 \equiv p_1 p_3 - x_2 x_4 = 0$$

(b) $$\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_4} = x_1 x_3 \quad \text{"} \quad F_2 \equiv p_2 p_4 - x_1 x_3 = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung

(c) $$(F_1, F_2) = F_3 \equiv x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0$$

ist, weil nicht ohne weiteres erfüllt, zu (a), (b) hinzuzunehmen, und diese drei Gl-en (a), (b), (c) stellen auch das ganze System (42) dar, weil, wie sich leicht ergiebt,

$$(F_1, F_3) = -2F_1 = 0 \qquad (F_2, F_3) = 2F_2 = 0$$

ist. Es ist jetzt noch die vierte Gleichung $F_4 = a$ aufzustellen, welche die simultane Lösung der drei Gl-en $(F_i, F) = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ ist. Dazu setzen wir (a), (b), (c) zunächst in eine

andere Form. Aus (a) folgt $p_1 = \frac{x_2 x_4}{p_3}$, und es wird (b):

(b b) $$p_2 - \frac{x_1 x_3}{p_4} = 0$$

also (c):

$$\frac{x_1 x_2 x_4}{p_3} - \frac{x_1 x_2 x_3}{p_4} + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0$$

$$p_3^2 - \left(\frac{x_4 p_4}{x_3} + \frac{x_1 x_2}{p_4}\right) p_3 + \frac{x_1 x_2 x_4}{x_3} = 0$$

$$\left(p_3 - \frac{x_4 p_4}{x_3}\right)\left(p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4}\right) = 0$$

Wir nehmen nun zunächst

$$p_3 - \frac{x_4 p_4}{x_3} = 0$$

an und haben also folgende Diff. Gl-en:

(a a) $$\bar{F}_1 \equiv p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4} = 0$$

(b b) $$\bar{F}_2 \equiv p_2 - \frac{x_1 x_3}{p_4} = 0$$

(c c) $$\bar{F}_3 \equiv p_3 - \frac{x_4 p_4}{x_3} = 0$$

Aus der besonderen Form der F_i folgt, dass

$$(F_i, F) = \frac{\partial F_i}{\partial x_4} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_4} - \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial p_4} \frac{\partial F}{\partial x_4} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist, und speciell zu setzen ist:

(α) $$(F_1, F) = -\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{x_2 x_3}{p_4^2} \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

(β) $$(F_2, F) = -\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{x_1 x_3}{p_4^2} \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

(γ) $$(F_3, F) = -\frac{p_4}{x_3} \frac{\partial F}{\partial p_4} - \frac{\partial F}{\partial x_3} + \frac{x_4}{x_3} \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

Offenbar sind x_3 und p_4 gemeinsame Lösungen von (α) und (β); nun ist zwar x_3 wegen $(\mathfrak{F}_3, x_3) = -1$ unbrauchbar, dagegen kann

$$G_1 = p_4$$

gesetzt werden, worauf sich

$$(\mathfrak{F}_3, p_4) = -\frac{p_4}{x_3} = G_2$$

ergiebt. Da G_2 von vorhergehenden Integralen abhängig ist, so brauchen wir nicht weiter zu gehen, sondern können sofort die Diff.gleichung für $\mathfrak{F}$ ansetzen. Doch ergiebt sich aus (γ), dass G_2 selbst $= \mathfrak{F}$ gesetzt werden kann; wir setzen daher unter Weglassung des wegen der Homogeneität unwesentlichen Vorzeichens

$$\mathfrak{F} = \frac{p_4}{x_3} = a \quad , \quad p_4 = a x_3 .$$

Aus (aa), (bb), (cc) folgt dann:

$$p_1 = \frac{x_2}{a} \; , \quad p_2 = \frac{x_1}{a} \; , \quad p_3 = a x_4$$

$$dz = \frac{1}{a}(x_2 dx_1 + x_1 dx_2) + a(x_4 dx_3 + x_3 dx_4)$$

$$(\mathfrak{A}) \qquad z = \frac{x_1 x_2}{a} + a x_3 x_4 + a'$$

Es kann zweitens

$$(a') \qquad p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4} = 0$$

gesetzt werden. Die beiden anderen Diff. Gl'en

werden

(c'.) $$p_1 - \frac{x_4 p_4}{x_1} = 0$$

(b'.) $$p_2 - \frac{x_1 x_3}{p_4} = 0$$

Wegen der Symmetrie der Indicessysteme (1, 3) und (2, 4) ergiebt sich hier das Integral:

(Z.) $$z = \frac{x_2 x_3}{\alpha} + \alpha x_1 x_4 + \alpha'.$$

Beide Integrale enthalten, wie es sein muss $n-m-r+1$ nämlich $4-2-1+1$ willkürliche Constanten.

Es ist noch die Frage zu beantworten, auf wie viele Arten zu dem den Integrabilitäts-bedingungen schon genügenden Systeme (42.), welches wir jetzt der Einfachheit wegen als aus den Gl'en

$F_1(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0, \ldots\ldots F_m(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0$, $(m < n)$

bestehend annehmen wollen, die $n-m$ Gl'en

$F_{m+1}(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_1 \ldots\ldots F_n(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_{n-m}$

hinzugenommen werden können, welche mit den ersteren zusammen die Berechnung der Grössen $p_1 \ldots\ldots p_n$ ermöglichen. Wenn wir nun bemerken, dass F_{m+1} aus den m Diff. Gl'en

$(F_1, F_{m+1}) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (F_m, F_{m+1}) = 0$

F_{m+2} aus $m+1$ ähnlichen Diff. Gl-en u. s. w. bestimmt wird, so erkennen wir, dass wir jene Frage beantworten können, wenn wir die Aufgabe gelöst haben die Anzahl der voneinander unabhängigen Lösungen eines Systemes homogener linearer partieller Diff. Gl-en zu bestimmen, welche sämtlichen Integrabilitätsbedingungen genügen. Ein solches System wird ein Jacobi-sches System genannt.

Es sei vorgelegt das Jacobi-sche System

$$(43) \quad \begin{cases} A_1(U) = A_{11}\frac{\partial U}{\partial x_1} + A_{12}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \cdots\cdots + A_{1n}\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (m < n) \\ A_m(U) = A_{m1}\frac{\partial U}{\partial x_1} + A_{m2}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \cdots\cdots + A_{mn}\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Die nach der Voraussetzung erfüllten Integrabilitätsbedingungen bestehen in den Gl-en (vgl. S. 80)

$$(43^x) \quad A_\lambda(A_\mu(U)) - A_\mu(A_\lambda(U)) \equiv 0 \quad , (\lambda, \mu = 1 \cdots m)$$

welche identisch erfüllt sind, d. h. für welche wenn sie entwickelt die Form

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(\lambda,\mu)} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

haben, sämtliche Coefficienten $C_i^{(l,\mu)}$ $(i=1\cdots n)$ verschwinden.
Wir werden beweisen, dass das Jacobi'sche System (43) von m homogenen linearen Diff. Gl-en mit n Variabeln n-m unabhängige Lösungen besitzt.
Der Beweis wird durch Induction geführt.
Für m=1 ist die einzige Diff. Gl.

$$A_{11}\frac{\partial U}{\partial x_1}+A_{12}\frac{\partial U}{\partial x_2}+\cdots\cdots\cdots+A_{1n}\frac{\partial U}{\partial x_n}=0$$

vorgelegt, welche ebensoviele unabhängige Integrale besitzt wie das zugehörige System gewöhnlicher Diff. Gl-en

$$\frac{dx_1}{A_{11}}=\frac{dx_2}{A_{12}}=\cdots\cdots\cdots=\frac{dx_n}{A_{1n}}$$

(vgl. S. 17), also in der That n-1 unabhängige Integrale, wie die Theorie der gewöhnlichen Diff. Gl-en zeigt. Wir haben bewiesen, dass eine willkürliche Function der linken Seiten der sich ergebenden n-1 Integralgl-en wieder ein Integral der vorgelegten Diff. Gl. ist und dass umgekehrt sich jede Lösung der letzteren sich durch jene n-1 darstellen lässt.

Wir nehmen jetzt an, dass die m-1 ersten Gl-en des Systemes (43.) n-m+1 unabhängige Lösungen besitze, sodass sich jedes ihrer simultanen Integrale in die Form

$$U = \varphi(U_1, U_2 \cdots U_{n-m+1})$$

setzen lässt, wenn $U_1 \cdots U_{n-m+1}$ n-m+1 solche voneinander unabhängige Integrale sind. Um letztere als unabhängige Variable in $A_m(U)$ einzuführen, was hiernach gestattet ist, bilden wir

$$A_m(U) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{m,\nu} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{m,\nu} \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_\nu} = \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} \sum_{\nu=1}^{n} A_{m,\nu} \frac{\partial U_i}{\partial x_\nu}$$

also

$$A_m(U) = \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} A_m(U_i)$$

Soll nun die Gleichung $A_m(U)=0$ auch durch die Integrale der m-1 ersten Gl-en befriedigt werden, so haben wir

$$\sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} A_m(U_i) = 0 .$$

Es ist wegen (43^x):

$$A_\lambda(A_m(U)) = A_m(A_\lambda(U)) , \quad (\lambda = 1, \cdots m-1)$$

ferner ist nach der Voraussetzung

$$A_\lambda(U_i) = 0 , \quad (i = 1 \cdots n-m+1, \lambda = 1 \cdots m-1)$$

Folglich haben wir:

$$A_\lambda(A_m(V_i))=0$$

d.h. $A_m(V_i)$ für $i=1\dots n-m+1$ ist eine Lösung der Gleichung $A_\lambda(V)=0$ für $\lambda=1\dots m-1$, es muss also $A_m(V_i)$ durch $V_1\dots V_{n-m+1}$ dargestellt werden können:

$$A_m(V_i)=\varphi_i(V_1\dots V_{n-m+1}).$$

Demnach haben wir für φ die Diff. Gl.

$$\varphi_1(V_1\dots V_{n-m+1})\frac{\partial\varphi}{\partial V_1}+\dots\dots+\varphi_{n-m+1}(V_1\dots\dots V_{n-m+1})\frac{\partial\varphi}{\partial V_{n-m+1}}=0$$

oder das System

$$\frac{dV_1}{\varphi_1}=\frac{dV_2}{\varphi_2}=\dots\dots=\frac{dV_{n-m+1}}{\varphi_{n-m+1}}$$

welches $n-m$ unabhängige Lösungen besitzt. Da sich also für φ $(n-m)$ von einander unabhängige Bestimmungen ergeben, so ist der Satz bewiesen.

Wir gehen jetzt zu einigen Anwendungen auf die analytische Mechanik über.

Capitel 4

Die Punkte eines materiellen Punktsystemes mit den Massen $m_1, m_2 \cdots m_n$ und den auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezüglichen Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1 ;\ x_2, y_2, z_2 ;\ \cdots\cdots ;\ x_n, y_n, z_n$$

seien äusseren Kräften mit den Componenten

$$X_1, Y_1, Z_1 ;\ X_2, Y_2, Z_2 ;\ \cdots\cdots\ X_n, Y_n, Z_n$$

unterworfen. Die Bewegung des Punktsystems soll dadurch beschränkt sein, dass zwischen den Coordinaten $p\ (<3n)$ Bedingungsgl-en bestehen, welche im allgemeinen auch die Zeit explicite enthalten:

$$F_u(x_1 \cdots\cdots z_n, t) = 0, \quad (u = 1, 2, \cdots p);$$

dann liefert das d'Alembert'sche Princip sowie das der Flächen eine Formel, welche ausdrückt, dass die verlorenen Kräfte vermöge der Bedingungsgl'en im Gleichgewichte stehen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right) \delta x_\nu + \left(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \right) \delta y_\nu + \left(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \right) \delta z_\nu \right\} = 0$$

dabei bezeichnen $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ die Componenten der virtuellen Verschiebung.

Bekanntlich kann man aus dieser Gleichung die Bewegungsgleichungen in der ersten Lagrange'schen Form ableiten; doch kommt für uns nur die zweite Form in Betracht. Zu diesem Zwecke führen wir an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten r unabhängige Grössen $q_1\, q_2 \cdots q_r$ ein, welche geeignet sind, die Lage des Systemes für irgend eine Zeit zu bestimmen. Indem wir also $x_1 \cdots z_n$ als Functionen dieser Grössen annehmen — entweder als solche, dass die Bedingungsgleichungen durch sie erfüllt sind, oder als beliebige, wo dann zu $F_1 = 0 \cdots F_p = 0$ noch $3n - p$ andere Gleichungen hinzuzunehmen sind, damit $x_1 \cdots\cdots z_n$ als Functionen der $q_1 \cdots\cdots q_r$ bestimmt werden können — und indem wir beachten, dass im allgemeinen $x_1 \cdots\cdots z_n$ von t abhängig sind, haben wir

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\rho} \frac{dq_\rho}{dt} \quad \text{- - - - - - -}$$

Wir machen nun die Annahme, dass die Zeit in den Bedingungsgleichungen nicht vorkomme. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x'_\nu \;\cdots\cdots\cdots\; \frac{dq_\rho}{dt} = q'_\rho$$

so erhalten wir

$$x'_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\rho} q'_\rho$$

Durch diese Substitution geht die lebendige Kraft des Systemes,

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_\nu (x'^2_\nu + y'^2_\nu + z'^2_\nu)$$

in eine quadratische Form der q'_ρ über, und es ergiebt sich durch eine einfache Rechnung (vgl. Anal. mech.) die umgewandelte Grundgleichung

$$\sum_{\rho=1}^{r} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} - \frac{\partial U}{\partial q_\rho} \right) \delta q_\rho = 0,$$

wo U das Potential der äusseren Kräfte bezeichnet, dessen Existenz vorausgesetzt wird. Nehmen wir nun insbesondere an dass die q_ρ so gewählt seien, dass die Bedingungsgleichungen identisch befriedigt sind, so sind die δq_ρ als voneinander unabhängig zu betrachten; die Grundgleichung in der transformierten Form kann also nur stattfinden, wenn

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} - \frac{\partial U}{\partial q_\rho} = 0, \quad (\rho = 1 \cdots r)$$

ist; dies sind die Bewegungsgleichungen in der zweiten Lagrange'schen Form.
Bei ihrer Ableitung wird nach dem vorigen vorausgesetzt, dass ein Potential der äussern Kräfte existiert, dass die Bedingungsgl'en die Zeit nicht enthalten und dass r die Anzahl der voneinander unabhängigen Grössen bezeichnet, von denen die Lage des Punktsystemes abhängt.

Es werden nun $q_1 \cdots q_r\, q'_1 \cdots q'_r$ als unabhängige Grössen betrachtet. T erscheint als homogene quadratische Function dieser Grössen, die Ableitung

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} = p_\rho$$

als homogene quadratische Function der $q_1 \cdots q_r$ als homogene lineare Function der $q'_1 \cdots q'_r$. Nun können wir T auch als Function der Argumente $q_1 \cdots q_r\, p_1 \cdots p_r$ auffassen. Bezeichnen wir die bei dieser Annahme nach q_ρ genommene partielle Ableitung von T durch $\left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho}\right)$, so haben wir für das vollständige Differential δT

die Ausdrücke:

$$\delta T = \sum_\rho \frac{\partial T}{\partial q_\rho}\delta q_\rho + \sum \frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\delta q'_\rho$$

$$\delta T = \sum_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho}\right)\delta q_\rho + \sum_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial p_\rho}\right)\delta p_\rho$$

wo der Gleichmässigkeit halber $\left(\frac{\partial T}{\partial p_\rho}\right)$ statt $\frac{\partial T}{\partial p_\rho}$ geschrieben worden ist. Nach dem Euler'schen Satze über homogene Functionen ist aber

$$\sum_\rho q'_\rho \frac{\partial T}{\partial q'_\rho} = \sum_\rho q'_\rho p_\rho = 2T,$$

folglich

$$2\delta T = \sum_\rho q'_\rho \delta p_\rho + \sum_\rho p_\rho \delta q'_\rho,$$

und es ergiebt sich aus dem ersten Ausdruck für δT:

$$\delta T = -\sum_\rho \frac{\partial T}{\partial q_\rho}\delta q_\rho + \sum_\rho q'_\rho \delta p_\rho$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten erhalten wir jetzt:

$$\frac{\partial T}{\partial q_\rho} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho}\right), \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_\rho}\right) = q'_\rho$$

Was die Kraftfunction U betrifft, so hängt sie nur von $x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n\ z_1 \dots z_n$ ab, wird also nach Einführung der neuen Veränderlichen eine Function von $q_1 \dots q_r$ allein, und es ist

$$\frac{\partial U}{\partial q_\rho} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_\rho}\right).$$

Mithin lauten die transformierten Bewegungsgl'en:

$$\frac{\partial p_\rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_\rho}\right) = 0, \qquad (\rho = 1 \cdots r)$$

$$\frac{\partial q_\rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_\rho}\right) \qquad (\rho = 1 \cdots r)$$

Beachten wir noch, dass $\frac{\partial U}{\partial p_\rho} = 0$ ist und setzen

$$T - U = H$$

so erhalten wir endgültig

B. $$\frac{\partial q_\rho}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \frac{\partial p_\rho}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}, \quad (\rho = 1 \cdots r)$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen in der sogenannten Hamilton'schen oder kanonischen Form; es bezeichnet dabei, wie nochmals hervorgehoben sei, r die kleinste Zahl von Grössen, durch welche das Punktsystem der Lage nach definiert werden kann.

Aus den vorstehenden Diff. gleichungen erhalten wir die Gleichungen

($\mathfrak{B}$) $$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dq_r}{\frac{\partial H}{\partial p_r}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \cdots = -\frac{dp_r}{\frac{\partial H}{\partial q_r}}$$

Sehen wir von dem ersten Gliede dt ab, so gehört das übrigbleibende System von 2r-1

Gleichungen zu der partiellen Diff.gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial V}{\partial q_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial V}{\partial q_r} - \frac{\partial H}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial p_1} - \cdots\cdots - \frac{\partial H}{\partial q_r}\frac{\partial V}{\partial p_r} = 0$$

oder

$$(H, V) = 0$$

Es seien V_1, V_2 zwei particuläre Integrale dieser Diff. gleichung, also $(H, V_1) = 0$, $(H, V_2) = 0$ dann ist nach dem Jacobi'schen Satze:

$$((H, V_1), V_2) + ((V_1, V_2), H) + ((V_2, H), V_1) = 0,$$

also auch $((V_1, V_2), H) = 0$, d. h. es ist auch (V_1, V_2) ein Integral der Diff.gleichung. Letzteres kann demnach aus V_1 und V_2 durch Differentiation hergeleitet werden; im allgemeinen liefert es auch eine neue Lösung der partiellen Diff. gleichung und also geht auch eine neue Lösung $(V_1, V_2) = C$ des Systemes gewöhnlicher Diff. gl-en aus den Particularlösungen $V_1 = C_1$, $V_2 = C_2$ hervor, ohne dass aber zugleich notwendig eine neue mechanische Einsicht erhalten wird.

Von diesen einfachen Überlegungen wollen wir eine Anwendung auf den Fall machen, dass keine Bedingungsgleichungen gegeben

sind, sodass wir für $q_1 \cdots q_r$ die Coordinaten $x_1 \cdots z_n$ setzen müssen — da diese jetzt voneinander unabhängig sind — also $r = 3n$ haben. Es möge nun angenommen werden, dass die äusseren Kräfte für die yz- und zx-Ebene das Princip der Flächen erfüllen, d. h. dass die Diff. gleichungen der Bewegung die Integrale

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (y_\nu z'_\nu - z_\nu y'_\nu) = A \,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (z_\nu x'_\nu - x_\nu z'_\nu) = B$$

haben, wo A, B Constanten bezeichnen. Wir wollen aus diesen Integralen $U_1 = A$, $U_2 = B$ das neue $(U_1, U_2) = C$ bilden.

Aus

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x'^2_\nu + y'^2_\nu + z'^2_\nu) \,, \quad p_\rho = \frac{\partial T}{\partial q'_\rho} \,, (\rho = 1 \cdots 3n)$$

folgt für p_ρ:

$$\frac{\partial T}{\partial x'_\nu} = m_\nu x'_\nu \quad \frac{\partial T}{\partial y'_\nu} = m_\nu y'_\nu \quad \frac{\partial T}{\partial z'_\nu} = m_\nu z'_\nu \,, \ (\nu = 1 \cdots n)$$

daher ist für $\rho = 1 \cdots 3n$ bezüglich

$$\frac{\partial U}{\partial p_\rho} = \begin{cases} \frac{1}{m_\nu} \frac{\partial U}{\partial x'_\nu} \\ \frac{1}{m_\nu} \frac{\partial U}{\partial y'_\nu} \\ \frac{1}{m_\nu} \frac{\partial U}{\partial z'_\nu} \end{cases} \qquad (\nu = 1 \cdots n);$$

ferner ist

$$\frac{\partial U_1}{\partial x'_\nu} = 0 \qquad \frac{\partial U_1}{\partial y'_\nu} = -m_\nu z_\nu \qquad \frac{\partial U_1}{\partial z'_\nu} = m_\nu y_\nu$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x'_\nu} = -m_\nu z'_\nu \qquad \frac{\partial U_2}{\partial y_\nu} = 0 \qquad \frac{\partial U_2}{\partial z_\nu} = m_\nu x'_\nu,$$

folglich erhalten wir:

$$(U_1, U_2) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial U_2}{\partial p_1} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial p_1} + \qquad +$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu y'_\nu - y_\nu x'_\nu) = C.$$

Wir haben also das Resultat: Wenn für die Bewegungsgleichungen zwei Flächensätze gelten, so gilt auch der dritte, oder: Es gilt entweder ein Flächensatz, oder sämtliche drei. Dieser Satz rührt von Poisson her, war ihm jedoch, wie Jacobi in seiner Dynamik auseinandergesetzt hat, nicht in seiner wahren Bedeutung bekannt.

Wir wollen nun was bisher ausgeschlossen war; annehmen, dass die Integrale der Bewegungsgleichungen t explicite enthalten, wir wollen also das gesamte System von $2r$ gewöhnlichen Diff. gl^en betrachten. Mit Hülfe des Hamilton'schen Princips, welches zunächst auseinander

gesetzt werden soll, kann auch diesem Gesamtsysteme eine partielle Diff. Gl. erster Ordnung zugeordnet werden.
Angenommen, die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} - \frac{\partial U}{\partial q_\rho} = 0\,, \quad (\rho = 1 \cdots r)$$

in welchen U von $q_1 \cdots q_r$, T ausserdem von $q'_1 \cdots q'_r$ abhängt, seien für ein vorgelegtes Problem integriert, d. h. es seien $q_1 \cdots q_r$ als Functionen von t bestimmt; dann sind auch T und U bekannte Functionen der Zeit. Es kommt nun darauf an, die erste Variation des Integrales

$$\int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt$$

zu bestimmen. Dieses Integral gehört zu dem allgemeineren Typus

$$V = \int_{t_0}^{t} F(q_1 \cdots q_r, q'_1 \cdots q'_r)\, dt.$$

wenn die Argumente der zu integrierenden Function variiert werden, d. h. wenn

$$\bar{q}_\rho = q_\rho + \kappa_\rho$$

und folglich

$$\bar{q}'_\rho = q'_\rho + \kappa'_\rho$$

als Argumente genommen werden, so geht V über in

$$\bar{V} = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{F}(q_1+\kappa_1, \cdots q_r+\kappa_r, q'_1+\kappa'_1 \cdots q'_r+\kappa'_r)\,dt$$

und wir erhalten:

$$\bar{V} - V = \int_{t_0}^{t}\Big[\sum_{\rho=1}^{r}\Big(\kappa_\rho \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q_\rho} + \kappa'_\rho \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q'_\rho} + \cdots\cdots\Big)\Big]dt$$

$$\delta V = \int_{t_0}^{t}\sum_{\rho=1}^{r}\Big(\kappa_\rho \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q_\rho} + \kappa'_\rho \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q'_\rho}\Big)\cdot dt$$

also mit Anwendung partieller Integration:

$$\delta V = \sum_{\rho=1}^{r}\Big[\kappa_\rho \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q'_\rho}\Big]_{t=t_0}^{t=t} + \int_{t_0}^{t}\sum_{\rho=1}^{r}\Big(\kappa_\rho \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q_\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q'_\rho}\Big)dt$$

In unserem Falle ist

$$\mathfrak{F} = T + U\,, \quad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q_\rho} = \frac{\partial T}{\partial q_\rho} + \frac{\partial U}{\partial q_\rho}\,, \quad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q'_\rho} = \frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\,;$$

werden ferner, wie es üblich ist, die willkürlichen Incremente κ_ρ mit δq_ρ bezeichnet, so folgt:

$$\delta V = \sum_{\rho=1}^{n}\Big[\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\delta q_\rho\Big]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}\sum_{\rho=1}^{r}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} - \frac{\partial U}{\partial q_\rho}\Big)\delta q_\rho \, dt$$

folglich ist

$$\delta V = \sum_{\rho=1}^{n}\Big[\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\delta q_\rho\Big]_{t_0}^{t}$$

Es wird nun insbesondere vorausgesetzt, dass die Variationen δq_ρ an den Grenzen des Integrales verschwinden, alsdann stellt die Gleichung $\delta V = 0$ oder

C. $$\delta \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt = 0$$

den Ausdruck des Hamilton-schen Princips dar.

Betrachten wir jetzt auch den Fall, dass die Variationen an den Grenzen nicht verschwinden, wo also

6. $$\delta V = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} \delta q_\rho\right]_{t_0}^{t}$$

ist. Die Integration der Diff. glen zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} - \frac{\partial U}{\partial q_\rho} = 0, \quad (\rho = 1 \cdots r)$$

führt $2r$ willkürliche Constanten ein. Wir können daher die Anfangsbedingungen stellen, dass für $t = t_0$

$$q_\rho = q_{\rho 0} \qquad q'_\rho = q'_{\rho 0} \qquad (\rho = 1 \cdots r)$$

sei. Die so eingeführten Constanten können als variabel betrachtet werden, und wir

dürfen daher die Annahme machen dass bei der Variation des Integrales V die Anfangswerte

$$q_{\rho 0}+\delta q_{\rho 0}\,,\quad q'_{\rho 0}+\delta q'_{\rho 0}\,,\quad (\rho=1\cdots r)$$

vorliegen. Dann ist

$$\delta V=\sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\delta q_\rho-\sum_{\rho=1}^{r}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\right)_0\delta q_{\rho 0}.$$

Die Integrale der obigen Bewegungsgl'en haben die Form:

$$F_\rho(t, q_1,\cdots q_r, q_{10}\cdots q_{r0}, q'_{10}\cdots q'_{r0})=0,\ (\rho=1\cdots r)$$

Aus ihnen können $q_1\cdots q_r$ als Functionen der Zeit und der Anfangswerte berechnet und in T, U und V eingesetzt werden. Es können auch die Grössen $q'_{10}\cdots q'_{r0}$ aus ihnen berechnet und ihre Werte in V eingesetzt werden, sodass V als Function von t, $q_1\cdots q_r$ $q_{10}\cdots q_{r0}$ erscheint. Dann folgt aus der für δV erhaltenen Formel

(L.) $$\frac{\partial V}{\partial q_\rho}=\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}$$

eine Beziehung, mit Hülfe deren sich die gesuchte partielle Diff. gleichung herstellen lässt. Denn es ist einerseits

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial V}{\partial q_\rho}\frac{dq_\rho}{dt}$$

andererseits aus der Erklärung von V:

$$\frac{dV}{dt} = T + U$$

sodass zunächst unter Anwendung des Euler'schen Satzes auf die Summe

$$\sum \frac{\partial V}{\partial q_\rho} q'_\rho = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_\rho} q'_\rho$$

$$\frac{dV}{dt} + 2T = T - U$$

folgt, oder

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

Aus der Hamilton'schen Form der Bewegungsgleichungen geht hervor, dass H eine Function der Grössen q_ρ und $p_\rho = \frac{\partial T}{\partial q'_\rho}$ ist:

$$H = \varphi(q_1 \cdots q_r, p_1 \cdots p_r).$$

Da aber $\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} = \frac{\partial V}{\partial q_\rho}$ ist, so lautet die gesuchte partielle Diff. gleichung

D. $$\frac{\partial V}{\partial t} + \varphi\left(q_1 \cdots q_r, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_r}\right) = 0;$$

auf ihre Betrachtung haben wir jetzt die Theorie der Bewegungsgl'en zurückgeführt. Durch die angestellte Transformation ist gezeigt worden, dass die $2r$ Bewegungsgl'en mit der Theorie einer partiellen Diff. gl. erster Ordnung in Zusammenhang gebracht

werden können, welche die Form

$$F\left(t, q_1 \cdots q_r \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_r}\right)=0$$

hat, oder für $\frac{\partial V}{\partial t} = p_{r+1}$;

$$F(t\, q_1 \cdots q_r\, p_1 \cdots p_{r+1}) = 0$$

also $r+1$ unabhängige Variablen enthält. Es müssen also r Gl-en $F_1 = 0 \ldots F_r = 0$ noch hinzugenommen werden, deren erste z. B. sich aus

$$(F, F_1) = 0$$

bestimmt. Statt aber diese Methode von Jacobi bei unserer Diff. gl. weiter zu verfolgen, wollen wir die Integration von einem neuen Gesichtspunkte aus in Angriff nehmen.

Die Cauchy'sche Methode leistet die Integration einer partiellen Diff. Gl. erster Ordnung

$$F(z\, x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0, \tag{44}$$

welche auch die abhängige Variable z enthalten darf. Diese Methode beruht darauf, an Stelle von $n-1$ Variabeln $x_1 \cdots x_{n-1}$ ebensoviele Functionen $\xi_1 \cdots \xi_{n-1}$ der unabhängigen veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ einzuführen

während x_n als unabhängige Veränderliche beibehalten wird. Zunächst sind die partiellen Ableitungen von z auszudrücken. Es sei $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ die Ableitung von z nach x_n <u>nach</u> Ausführung der Transformation, sodass $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ im allgemeinen nicht $= p_n$ ist. Ferner beachten wir, dass aus den Transformationsgleichungen sich umgekehrt $x_1 \dots x_{n-1}$ als Functionen von $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ ergeben müssen, während x_n von $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ unabhängig ist.
Wir haben daher die Formeln:

$$(a)\quad \frac{\partial z}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}; \quad (b)\quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial x_n}.$$

Ferner wird nach dem Verfahren von Cauchy gebildet

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_k} = 0, \ (k = 1 \dots n-1), \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

Gleichungen, von denen man stets zu (44.) zurückkehren kann, falls für $\xi_1 \dots \xi_{n-1}, x_n$ Anfangswerte gegeben sind. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_k} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial \xi_k} = 0;$$

aus (a) und (b) folgt nun:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_k \partial x_n} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial p_i}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial p_n}{\partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_n \partial \xi_k} + \frac{\partial x_i}{\partial x_n}\frac{\partial p_i}{\partial \xi_k}\right),$$

folglich

(c) $$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial p_i}{\partial x_n} - \frac{\partial x_i}{\partial x_n}\frac{\partial p_i}{\partial \xi_k}\right),$$

und wir erhalten:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = \frac{\partial F}{\partial z}\sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial p_i}{\partial x_n} - \frac{\partial x_i}{\partial x_n}\frac{\partial p_i}{\partial \xi_k}\right)$$

oder:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\left(p_i\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p_i}{\partial \xi_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial x_i}{\partial x_n}\right) = 0$$

Es wird nun die Bestimmung der Functionen $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ als derartig vorausgesetzt, dass die Gl~en

45. $$\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial x_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1 \dots n-1)$$

bestehen; wir haben alsdann in den $n-1$ Gl~en

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\left(p_i\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial x_n}\right) = 0$$

ein System linearer homogener Gleichungen in den Klammergrössen mit nicht verschwindender Determinante

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right|, \quad (i, k = 1 \dots n-1).$$

Denn wäre

$$\frac{\partial(x_1 \dots x_{n-1})}{\partial(\xi_1 \dots \xi_{n-1})} = 0,$$

so müsste zwischen $x_1 \dots x_{n-1}$ eine Relation bestehen, welche $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ in den Coefficienten nicht enthielte; dies widerspricht aber der vorausgesetzten

Unabhängigkeit der Variabeln. Es ziehen also die Cauchy'schen Bedingungen (45) auch die Gleichungen

45.* $$p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0 \quad , \quad (i = 1 \cdots n-1)$$

nach sich. — Um schliesslich $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ zu bilden, so multipliciren wir die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_n} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_n} = 0$$

mit $\frac{\partial F}{\partial p_n}$ und erhalten unter Benutzung obiger Formeln:

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial F}{\partial z} p_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-p_i \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_n} \right)^2 \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial F}{\partial z} p_n + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_n} + \left(\frac{\partial F}{\partial p_n} \right)^2 \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0$$

oder nach Division durch $\frac{\partial F}{\partial p_n}$:

45.** $$p_n \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0.$$

Aus den hier abgeleiteten Gleichungen können $x_1 \cdots x_{n-1}, z, p_1 \cdots p_n$ als Functionen von $x_n, \xi_1 \cdots \xi_{n-1}$ bestimmt werden; da in diesen Gl'en, den Gl'en (6), (45) (45*), (45**) die Ableitungen

nach den Grössen ξ nicht vorkommen, so können sie wie gewöhnliche Diff. gl'en inbezug auf x_n behandelt werden. Der Wert von z folgt aus

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial x_n}.$$

Für $i = 1, 2, \cdots$ erhalten wir aus (45) die Diff. gl

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} = 0 \quad \cdots\cdots$$

welche wegen $\frac{\partial x_1}{\partial x_n} = \frac{dx_1}{dx_n} \cdots$ mit dem Systeme

$$\frac{dx_1}{F'_{(p_1)}} = \frac{dx_2}{F'_{(p_2)}} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{F'_{(p_n)}}.$$

gleichbedeutend ist; zu beachten ist dabei, dass die Integrationsconstanten im allgemeinen Functionen der ξ sind. Aus (6) folgt ferner

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n \frac{\partial F}{\partial p_n} + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

aus (45^{x}) und (45^{xx}):

$$\frac{dx_n}{F'_{(p_n)}} = \frac{-dp_i}{F'_{(x_i)} + p_i F'_{(z)}}, \quad (i = 1 \cdots n),$$

wir erhalten also das Gesamtsystem von $2n$ Gl

46. $$\frac{dx_1}{F'_{(p_1)}} = \frac{dx_2}{F'_{(p_2)}} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{F'_{(p_n)}} = \frac{dz}{p_1 F'_{(p_1)} + \cdots + p_n F'_{(p_n)}}$$

$$= \frac{-dp_1}{F'_{(x_1)} + p_1 F'_{(z)}} = \cdots\cdots = \frac{-dp_n}{F'_{(x_n)} + p_n F'_{(z)}}.$$

durch welche bei gegebenen Anfangswerten die $2n$ Functionen $x_1 \dots x_{n-1}$ z $p_1 \dots p_n$ bestimmt werden. Aus (46) ist jede Bevorzugung von x_n verschwunden. es hätte daher auch jede andere der Grössen x statt x_n gewählt werden können. Die Grössen $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ treten in den Integrationsconstanten auf.

Da die Gl-en (46) sich vorläufig nur als eine Folgerung aus der Annahme, dass die Gleichung (44) bestehe, kennzeichnen, so ist es von wesentlicher Bedeutung, auch umgekehrt zeigen zu können, dass aus (46) eine Function z gefunden werden kann, welche der Gleichung (44) genügt und für welche $p_1 \dots p_n$ die Bedeutung der partiellen Differentialquotienten haben. Als Anfangsbedingung sei festgesetzt, dass für $x_n = \alpha_n$

$x_i = \alpha_i$ $(i = 1 \dots n-1)$, $p_\nu = \beta_\nu$ $(\nu = 1 \dots n)$, $z = \varsigma$

werden soll. Hierbei ist α_n eine Constante, während $\alpha_i, \beta_\nu, \varsigma$ Functionen von $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ sind. Wir haben die Gleichung

$$F(\alpha_1, \dots \alpha_n, \varsigma, \beta_1 \dots \beta_n) = 0;$$

sie muss mit (46) zusammen (44) ergeben.

Nun folgt aus den Gl-en (46):

$$dx_1 = \lambda F'_{(p_1)} \cdots\cdots dz = \lambda \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu F'_{(p_\nu)},\ dp_1 = -\lambda(F'_{(x_1)} + p_1 F'_{(z)}),$$

also ist

$$dF = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu} dp_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} F'_{(x_\nu)} dx_\nu + F'_{(z)} dz + \sum_{\nu=1}^{n} F'_{(p_\nu)} d[illegible]$$

daher $F = C$, und vermöge der Anfangsgleichung $C = 0$, also in der That

$$F = 0.$$

Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, sei zunächst angenommen, dass die durch (46) definierten Grössen $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ nicht den Grössen p_i gleich seien, sondern von diesen verschiedene Werte $\bar{p}_i$ haben. Es ist dann nach (a)

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{p}_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \qquad (k = 1 \cdots\cdots n-1);$$

wenn nun, was nicht ohne weiteres feststeht die Gl-en (a) beständen, so würde die Gl.

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - \bar{p}_i) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = 0$$

folgen, welche wegen des Nichtverschwinden der Determinante $\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right|$ die gewünschten Gl-en $p_i = \bar{p}_i$ nach sich ziehen würde, und es würde sich sodann aus (b) ebenso $p_n = \bar{p}_n$ ergeben

Nun besteht thatsächlich die Gleichung (b), weil sie in (46) enthalten ist, es kommt also alles auf die Beantwortung der Frage an, ob auch die Gl'en (a) gleichzeitig mit (46) bestehen. Angenommen, dies sei nicht der Fall, sondern es möge sich nach der Integration des Systemes (46) ergeben:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + T,$$

folglich (vgl. S. 160)

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_k} = A + \frac{\partial T}{\partial x_n},$$

wobei

$$A = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial p_i}{\partial x_n} - \frac{\partial x_i}{\partial x_n} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_k} \right)$$

ist. Nun ist, weil $F = 0$, auch $\frac{\partial F}{\partial \xi_k} = 0$, daher

$$F'_z T + F'_{(p_n)} \frac{\partial T}{\partial x_n} = 0,$$

und es folgt:

$$T = C e^{-\int \frac{F'_{(z)}}{F'_{(p_n)}} dx_n},$$

oder, wenn C so bestimmt wird, dass für $x_n = \alpha_n$ T den Wert T_0 annimmt

$$T = T_0 e^{-\int_{\alpha_n}^{x_n} \frac{F'_{(z)}}{F'_{(p_n)}} dx_n}.$$

Für die Richtigkeit unserer Behauptung ist offenbar das Verschwinden von T_0

hinreichend, weil die Integrationsvariable x_i von vornherein immer so gewählt werden kann, dass $F'_{(p_i)}$ nicht verschwindet.
Wir wollen nun die Bedingung aufstellen unter der $T_0 = 0$ ist. Es ist

$$T = \frac{\partial z}{\partial \xi_k} - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$$

für $x_n = \alpha_n$ zu bilden. Da für diesen Anfangswert z den Wert ς annehmen sollte, so muss die Integration von (46) für z eine Reihe von der Form

$$z = \varsigma_n + (x_n - \alpha_n)\, \mathcal{G}(x_n - \alpha_n)$$

ergeben, aus welcher folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \varsigma}{\partial \xi_k} + (x_n - \alpha_n) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi_k},$$

also, für $x_n = \alpha_n$:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \varsigma}{\partial \xi_k}.$$

Da ferner die Anfangswerte von x_i, p_ν bezw. α_i, β_ν $(i = 1 \cdots n-1,\ \nu = 1 \cdots n)$ sein sollten, so ergiebt sich

$$47. \qquad \frac{\partial \varsigma}{\partial \xi_k} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k} = 0 \qquad (k = 1 \cdots n-1)$$

Diese Gl-en müssen also die Anfangswerte erfüllen, falls die durch Integration von (46) ermittelten functionalen Beziehungen zu einem Integral von (44) führen sollen.

Die Bedingungen (47) lassen sich auf mannigfache Weise erfüllen. Es seien z. B. $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \varsigma$ Constanten. Aus (46) werde durch Integration erhalten

$$x_i = g_i(x_n \varsigma \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \beta_1 \cdots \beta_{n-1}), (i = 1 \cdots n-1)$$

Die Constante α_n braucht nicht in g_i aufgenommen zu werden, weil sie bekannt ist, und ebenso β_n, welche sich aus der vorauszusetzenden Gleichung

$$F(\alpha_1 \cdots \alpha_n \varsigma \beta_1 \cdots \beta_n) = 0$$

berechnen lässt. Ähnlich ergiebt sich für z

$$z = h(x_n, \varsigma, \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, \beta_1 \cdots \beta_{n-1}).$$

Die Grössen $\beta_1 \cdots \beta_{n-1}$ sind Functionen von $\xi_1 \cdots \xi_{n-1}$ und können offenbar diesen Grössen selbst gleichgesetzt werden. Indem wir sie aus den vorhandenen n Gl-en eliminieren, erhalten wir die Gleichung

$$H(x_1 \cdots x_{n-1}, x_n, z, \varsigma, \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}) = 0,$$

aus welcher z als eine Function von $x_1 \cdots x_n$ folgt, welche n Constanten enthält und nach der Herleitung ein Integral der Gl. (44.) ist. Das Auftreten von n d. h. ebensovielen Constanten, wie in dieser partiellen

Diff. Gl. partielle Ableitungen auftreten, charakterisiert jenes Integral als ein vollständiges.

Die allgemeinste Annahme, die Bedingung (47) zu erfüllen, besteht darin,

$$\zeta = \varphi(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})$$

zu setzen. Es wird alsdann

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k}, \qquad \beta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$$

Hier können wir wieder für die Grössen $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ annehmen, und die Integration ergiebt die Gl-en

$$x_i = g_i\left(x_n\, \xi_1 \dots \xi_{n-1}\, \varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n-1}}\right), \quad (i = 1 \dots n-1)$$

$$z = h\left(x_n\, \varphi\, \xi_1 \dots \xi_{n-1}\, \varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n-1}}\right),$$

aus denen durch Elimination von $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ wieder ein vollständiges Integral hervorgeht. Zwischen diesen beiden extremen Annahmen liegen die Fälle, in welchen

$$\zeta = \varphi(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}) \qquad (m < n)$$

gesetzt wird, während

$$\alpha_m, \alpha_{m+1} \dots \alpha_{n-1}$$

als Constanten angenommen werden.

Die hier auftretenden Modificationen ergeben sich leicht.
Wie man von einem vollständigen Integral, dessen Ermittelung bei einer partiellen Diff. Gl. erster Ordnung gewöhnlich verlangt wird, zu dem allgemeinen Integrale übergeht, ist früher ausführlich erörtert worden.
Die Cauchy'sche Methode möge zunächst auf die Diff. Gl.

$$p_1 \cdots p_n - x_1 \cdots x_n = 0,$$

eine Verallgemeinerung eines früheren Beispieles, angewandt werden. Wir haben

$$F'_{(z)} = 0 \quad F'_{(x_\nu)} = -x_1 \cdots x_{\nu-1} x_{\nu+1} \cdots x_n \quad F'_{(p_\nu)} = p_1 \cdots p_{\nu-1} p_{\nu+1} \cdots p_n$$

$$p_1 F'_{(p_1)} + \cdots\cdots + p_n F'_{(p_n)} = n\, p_1 \cdots p_n,$$

also lautet das System (46)

$$p_1 dx_1 = \cdots = p_n dx_n = \frac{dz}{n} = x_1 dp_1 = \cdots = x_n dp_n.$$

Aus $p_\nu dx_\nu = x_\nu dp_\nu$ folgt $p_\nu : x_\nu = C_\nu$ und da für $x_n = \alpha_n$ $x_\nu = \alpha_\nu$ $p_\nu = \beta_\nu$ werden soll,

$$p_\nu = \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} x_\nu, \qquad (\nu = 1 \cdots n);$$

ferner haben wir $\frac{dz}{n} = p_\nu dx_\nu$, also $dz = \frac{n\beta_\nu}{\alpha_\nu} x_\nu dx_\nu$, und hieraus folgt mit Berücksichtigung des

Anfangswertes ζ:

$$z - \zeta = \frac{n\beta_\nu}{2\alpha_\nu}(x_\nu^2 - \alpha_\nu^2). \qquad (\nu = 1 \cdots n)$$

Aus diesen Gl-en sowie der Gl.

$$\beta_1 \cdots \beta_n - \alpha_1 \cdots \alpha_n = 0$$

müssen die Grössen $\beta_1 \cdots \beta_{n-1}$ eliminiert werden. Die Elimination geschieht leicht durch Multiplication der n ersten Gl-en, welche nämlich

$$(z-\zeta)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{\beta_1 \cdots \beta_n}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \prod_{\nu=1}^{n} (x_\nu^2 - \alpha_\nu^2)$$

ergiebt. Die Hinzunahme der letzten Gl. $\prod_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu$ führt zu dem vollständigen Integrale:

$$(z-\zeta)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \prod_\nu (x_\nu^2 - \alpha_\nu^2).$$

Wenn wir jetzt eine Anwendung der Cauchy-schen Methode auf die Bewegung eines Systemes materieller Punkte machen, so handelt es sich vor allem darum, die partielle Diff. Gl.

$$(D.) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1 \cdots q_r, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_r}\right) = 0,$$

welcher die Function

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt$$

genügt, mit den Bewegungsgl'en (B) oder (𝔅) in Zusammenhang zu bringen.
Die Diff. Gl. (D) enthält $r+1$ unabhängige Variable, es müsste also das zu ihr gehörige System, welches dem Systeme (46) entspricht, $2r+2$ Gl'en enthalten. Nun enthält aber (𝔅) nur $2r$ Gl'en, doch sind die Quotienten, welche dV und dp_{r+1} im Zähler enthalten, leicht hinzuzufügen, sie können indes als für die folgende Untersuchung unwesentlich ausser Betracht bleiben. Es ist nun zunächst zu prüfen, ob von Lösungen der Diff. Gl. (D) auf Lösungen von (B) etwas geschlossen werden kann. Angenommen, es sei ein vollständiges Integral V von (D) bekannt. Für $t=t_0$ sollte

$$q_\rho = q_{\rho 0} \qquad q'_\rho = q'_{\rho 0} \qquad (\rho = 1 \cdots r)$$

werden. Ferner ist

$$\delta V = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\right]_{t_0}^{t} \delta q_\rho = \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\delta q_\rho - \sum_{\rho=1}^{r}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\right)\delta q_{\rho 0}$$

folglich

$$(a) \quad \frac{\partial V}{\partial q_{\rho 0}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\rho}\right)_0 = -p_{\rho 0}\,, \qquad (b) \quad \frac{\partial V}{\partial q_\rho} = p_\rho$$

Die Integration der 2r Gl-en (B) führt ebenso viele willkürliche Constanten $q_{10} \cdots q_{r0}\ p_{10} \cdots p_{r0}$ ein. Schreiben wir

$$V = V(t, q_1 \cdots q_r, q_{10} \cdots q_{r0})$$

so stehen auf den linken Seiten von (a) Functionen derselben Art, wir haben also in (a) ein System von r Gl-en zwischen $q_1 \cdots q_r\ t$ welche r willkürliche Constanten enthalten. Diese Gl-en können daher nicht anderes sein als die gesuchten functionalen Beziehungen, d.h. die Integrale von (B).

Die Gl-en (b) enthalten in ihren linken Seiten Functionen von $t\ q_1 \cdots q_r, q_{10} \cdots q_{r0}$ während die rechten Seiten Functionen der Grössen $q_1 \cdots q_r\ q_1' \cdots q_r'$ — in den letzteren homogen und linear — und der Constanten $q_{10} \cdots q_{r0}$ sind. Diese Diff. Gl-en erster Ordnung stellen mithin die ersten Integrale der Bewegungsgleichungen dar.

Ist also ein Integral V der Diff. Gl. (2) bekannt so können durch partielle Differentiation nach den q_1 die ersten Integrale der Bewegungsgleichungen, durch partielle Differentiation

nach den $q_{\rho 0}$ die Integralgl-en selbst erhalten werden.

Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen, als deren Function V betrachtet wird, ist r+1, und ebensoviele Constanten müssen in dem vollständigen Integrale V auftreten. Nun enthält aber nach unserer bisherigen Annahme V nur die r Constanten $q_{10} \dots q_{r0}$; doch kann immer eine $(r+1)^{te}$ Constante C dadurch eingeführt werden, dass V durch V+C ersetzt wird, was immer gestattet ist, da (D.) die abhängige Variable V nicht explicite enthält. Aus einem solchen vollständigen Integrale können also, wie soeben angegeben, die ersten und zweiten Integrale der Bewegungsgleichungen durch Differentiation hergeleitet werden.

Es ist wichtig zu entscheiden, ob man, von irgend einem vollständigen Integrale ausgehend, auf demselben Wege die Integrale der Bewegungsgl-en finden kann.

Angenommen also, es sei die Function

$$G(t, q_1 \cdots q_r, \alpha_1 \cdots \alpha_r),$$

welche r willkürliche Constanten $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ enthält, ein Integral von (D); der Ansatz

$$V = G + C,$$

wo C eine willkürliche Constante kennzeichnet alsdann V als vollständiges Integral. Wir bilden nun, den Gl-en (a), (b) entsprechend

$$(c.) \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_\rho} = \beta_\rho, \quad (d) \quad \frac{\partial V}{\partial q_\rho} = p_\rho$$

Es soll untersucht werden, ob die Gl-en (c) die Integrale der Bewegungsgl-en, (d) die ersten Integrale der Bewegungsgl-en liefern. Letzteres ist offenbar bewiesen, wenn die Differentiation nach t die Gl-en (c), (d) in (33) überführt. Zu beachten ist, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ nicht mehr Anfangswerte zu sein brauchen, sondern irgend welche durch das Integrationsverfahren eingeführte unabhängige Constanten sind.

Aus (c) folgt, da $q_1 \cdots q_r$ als Functionen von t zu betrachten sind:

$$(d^x.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\rho \partial t} + \sum_{\kappa=1}^{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\rho \partial q_\kappa} \frac{dq_\kappa}{dt} = 0. \quad (\rho = 1 \cdots r)$$

Aus diesen Gl'en können die Grössen $\frac{dq_\kappa}{dt}$ berechnet werden, falls die Determinante

$$\Delta = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\rho \partial q_\kappa} \right| \qquad (\rho, \kappa = 1 \cdots r)$$

von Null verschieden ist. Da nun

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\rho \partial q_\kappa} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial q_\kappa}\right)$$

ist, so würde falls $\Delta = 0$ wäre, die Functionaldeterminante der Grössen $\frac{\partial V}{\partial q_\kappa}$ nach $\alpha_1 \dots \alpha_r$ verschwinden, es müsste also zwischen diesen Grössen $\frac{\partial V}{\partial q_\kappa}$ eine Gleichung stattfinden, in deren Coefficienten $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ nicht mehr vorkommen:

$$(e.) \qquad H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_r}\; q_1 \cdots q_r\; t\right) = 0$$

Diese Gleichung müsste also gleichzeitig mit (D) bestehen. Es wird behauptet, dass der Begriff des vollständigen Integrales dies unmöglich macht. Aus

$$(f) \qquad V = G + C$$

möge folgen:

$$(g) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = G' \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial q_\rho} = G_\rho$$

Durch Elimination der $r+1$ Constanten muss, so wird vorausgesetzt, (B.) sich ergeben. Es kommt aber C nur in (J) vor, folglich muss (D) sich dadurch ergeben, dass die r Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ aus (g) eliminiert werde. Angenommen nun, es könnte (e) aus diesen Gleichungen hergeleitet werden. Dann müsste es möglich sein, aus den r Gl-en $\frac{\partial V}{\partial q_\rho} = G_\rho$ die $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ herauszuschaffen, was nur dann möglich ist, wenn diese Constanten in höchsten $r+1$ willkürlichen Verbindungen vorkommen; jedenfalls aber könnten dann der Voraussetzung entgegen $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ nicht unabhängig sein. Soll also der Ansatz $V = G + C$ ein vollständiges Integral mit $r+1$ unabhängigen Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_r$, C darstellen, so kann man durch Differentiation nicht zu einer Gleichung gelangen, welche $\frac{\partial V}{\partial t}$ nicht enthält. Daher kann (e) mit (D) nicht bestehen, und es ist folglich $\Delta \gtrless 0$.

Da V ein vollständiges Integral von (D) ist, so müssen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial}$ in (D) eingesetzt ein identisches Ergebniss lie

Eine solche Identität kann nach jeder in ihr vorkommenden Grösse differentiert werden. Wir differentiieren nach α_ρ und beachten, dass diese Grösse in $q_1 \cdots q_r$ nicht vorkommt. Es ergiebt sich:

$$(h.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_\rho} + \sum_{\kappa=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial p_\kappa} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\kappa \partial \alpha_\rho} = 0$$

Aus (d^x) und (h) ersehen wir, dass die beiden Wertsysteme

$$\frac{dq_\kappa}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\kappa}$$

demselben Systeme linearer Gl^en mit nicht verschwindender Determinante genügen. Wir schliessen daraus:

$$\frac{dq_\kappa}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\kappa}, \qquad (\kappa = 1 \cdots r)$$

womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist. Ferner haben wir aus (d) zu bilden:

$$\frac{dp_\rho}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_\rho \partial t} + \sum_{\kappa=1}^{r} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\rho \partial \alpha_\kappa} \frac{d\alpha_\kappa}{dt} + \sum_{\kappa=1}^{r} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\rho \partial q_\kappa} \frac{dq_\kappa}{dt}$$

Das mittlere Glied der rechten Seite fällt weg, da V ein vollständiges Integral ist,

die Grössen $\alpha_1 \dots \alpha_r$ also nicht nach Functionen anderer Grössen sind:

$$\frac{dp_\rho}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_\rho \partial t} + \sum_{\kappa=1}^{r} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\rho \partial q_\kappa} \frac{\partial H}{\partial p_\kappa}.$$

Genau wie im ersten Falle ergiebt die Differentiation der vorgelegten Diff. Gl. nach q_ρ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q_\rho} + \frac{\partial H}{\partial q_\rho} + \sum_{\kappa=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial p_\kappa} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\kappa \partial q_\rho} = 0 \;;$$

die resultierenden Gl-en

$$\frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \qquad (\rho = 1 \dots r)$$

bestätigen den zweiten Teil der Behauptung. Wir haben hiermit folgendes Resultat erlangt: wenn man die partielle Diff. Gl. $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ ansetzt, wo H zuerst als Function von $q_1 \dots q_r\ p_1 \dots p_r$ zu betrachten ist, und wenn man dann auf irgend einem Wege ein vollständiges Integral V dieser Diff. Gl. mit den r Constanten $\alpha_1 \dots \alpha_r$ und der additiven Constanten C abgeleitet hat, so ergeben sich die ersten Integrale der Bewegungsgl-en, indem man $\frac{\partial V}{\partial q_\rho} = p_\rho$ setzt und sich immer nach der Definition $p_\rho = \frac{\partial T}{\partial q'_\rho}$

eingeführt denkt. Es wird p_ρ eine homogene lineare Function der Grössen q'_ρ, welche durch die ersten Integrale bestimmt werden. Differentiirt man alsdann partiell nach $\alpha_1 \dots \alpha_r$ und setzt die Resultate $\beta_1 \dots \beta_r$, so erhält man die gesuchten Integrale, welche $q_1 \dots q_r$ als Functionen von t und 2r willkürlichen Constanten liefern.

Wir wollen zur Veranschaulichung noch kurz den Fall behandeln, in welchem keine Bedingungsgl-en vorhanden sind, sodass die cartesischen Coordinaten $x_1 \dots z_n$ als Bestimmungsgrössen der materiellen Punkte stehen können. Es ist

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_\nu (x'^2_\nu + y'^2_\nu + z'^2_\nu),$$

$$p_\rho = \frac{\partial T}{\partial q'_\rho} = \begin{cases} m_\nu x'_\nu & \\ m_\nu y'_\nu & (\nu = 1 \dots n) \\ m_\nu z'_\nu & (\rho = 1 \dots 3n) \end{cases}$$

und wir erhalten, wie leicht zu bestätigen, die Diff. gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{m_\nu}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\nu}\right)^2\right] - U = 0.$$

Bevor wir die Theorie der partiellen Diff. Gl.en erster Ordnung verlassen, wollen wir noch eine Anwendung der Jacobi'schen Methode auf die Flächentheorie machen. Bekanntlich genügen die cartesischen Coordinaten x, y, z einer Fläche den simultanen partiellen Diff. Gl.en

$$
\text{A.}\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = I_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} + I_2 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{L} X \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = I_1' \dfrac{\partial x}{\partial u} + I_2' \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{M} X \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = I_1'' \dfrac{\partial x}{\partial u} + I_2'' \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{N} X
\end{cases}
$$

und den entsprechenden für y, z. Es bezeichnen $I_1, \cdots I_2''$ bekannte Functionen der Fundamentalgrössen

$$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$$

und ihrer ersten Ableitungen. Dieselbe Beschaffenheit haben die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Gl.en

$$
\text{Cr.}\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial X}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\[2ex]
\dfrac{\partial X}{\partial v} = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial x}{\partial v}.
\end{cases}
$$

Wenn nun $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}; \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ als Functionen von u und v gegeben sind, lässt sich dann stets eine Fläche finden, für welche x, y, z die Bedeutung der cartesischen Coordinaten und $\mathcal{E} \dots \mathcal{N}$ die Bedeutung der Fundamentalgrössen haben?
Zunächst ist zu beachten, dass $\mathcal{E} \dots \mathcal{N}$ durch die sogenannte Fundamentalgleichungen miteinander verbunden sein müssen, nämlich durch die Gl-en:

$$\frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = K,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} + \mathcal{M}\Gamma_1 + \mathcal{N}\Gamma_2 - \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u} + \mathcal{L}\Gamma_1' + \mathcal{M}\Gamma_2'\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u} + \mathcal{L}\Gamma_1'' + \mathcal{M}\Gamma_2'' - \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} + \mathcal{M}\Gamma_1' + \mathcal{N}\Gamma_2'\right) = 0,$$

wo K eine bekannte Function von $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ und ihrer ersten und zweiten Ableitungen ist. Nur unter Voraussetzung dieser Gl-en kann für gegebene $\mathcal{E}, \dots \mathcal{N}$ die obige Frage gestellt werden.
Die Beantwortung unserer Frage ist z.B. von Wichtigkeit für die Theorie der Abwicklung. Dort ist

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

bekannt, d. h. es sind E, F, G gegebene Functionen von u und v, und es wird gefordert, alle Flächen zu finden, denen dieses Linienelement zukommt, für welche also nach passender Bestimmung von x, y, z

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

geschrieben werden kann, wo ds^2 den gegebenen Ausdruck hat. Man kann nun die Lösung der Aufgabe folgendermassen versuchen. Man bestimmt L, M, N aus den Fundamentalgleichungen, d. h. aus zwei partiellen Diff. Gl-en und einer algebraischen Gleichung. Angenommen, für ein specielles System sei diese Bestimmung ausgeführt; giebt es dann auch umgekehrt Flächen, für welche L, M, N als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zu betrachten sind?

Die Form der Gl-en (A.), (C.) nötigt uns, gleichzeitig mit x, y, z auch X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale, in Betracht zu ziehen. Wenn also $x\,X, y\,Y, z\,Z$ als voneinander unabhängige Lösungen

jedesmal eines Systemes von 5 Gl-en ermittelt sind, giebt es dann eine Fläche, für welche X, Y, Z; E, F, G; L, M, N bezüglich die Bedeutung der Richtungscosinus der Flächennormale und der Fundamentalgrössen haben?

Wir setzen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1 \quad , \frac{\partial x}{\partial v} = x_2 \quad , \quad X = x_3$$

und bringen dadurch die Gl-en (A), (C) auf die Form:

$$(B)\quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + L x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x_2}{\partial u} = \Gamma_1' x_1 + \Gamma_2' x_2 + M x_3 \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} = \Gamma_1'' x_1 + \Gamma_2'' x_2 + N x_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases}$$

Anstatt nun auf die Integration dieses Systemes linearer Gl-en selbst einzugehen, suche man eine Function $F(x_1, x_2, x_3, u, v)$ zu bestimmen, welche $=0$ gesetzt, eine Bestimmungsgleichung für die Grössen x_1, x_2, x_3 als Functionen von u und v liefern

soll. Es sei also auf irgend einem Wege eine Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3, u, v) = 0$$

gefunden. Durch drei solche Gl-en würde man zur Bestimmung von $x_1\ x_2\ x_3$ gelangen. Um zunächst zu untersuchen, welchen Bedingungen die Function F genügen müsse, differentiieren wir sie nach u und v, was gestattet ist, da die Gleichung $F=0$ für alle Werte u, v eines bestimmten Bereiches gelten muss:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

oder

$$(B)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(I_1 x_1 + I_2 x_2 + L x_3) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(I_1' x_1 + I_2' x_2 + M x_3) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(\alpha x_1 + \beta x_2) + \ldots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(I_1' x_1 + I_2' x_2 + M x_3) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(I_1'' x_1 + I_2'' x_2 + N x_3) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(\gamma x_1 + \delta x_2) + \ldots \end{cases}$$

wenn also, wie vorausgesetzt, die Gl-en (B) genügen, einem Systeme homogener partieller Diff. Gl-en erster Ordnung für F betrachtet als Function der fünf Veränderlichen x_1, x_2, x_3, u, v. Das System

ist ein Jacobi'sches. Schreiben wir die Gl'en

$$A(F)=0 \qquad \mathfrak{B}(F)=0$$

so ist in der That

$$C(F) = \mathfrak{B}(A(F)) - A(\mathfrak{B}(F))$$

identisch null. Wir haben nämlich

$$C_\nu = \mathfrak{B}(A_\nu) - A(\mathfrak{B}_\nu) \quad , (\nu = 1 \dots 5)$$

und z. B. für $\nu=1$:

$$A_1 = \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + \mathcal{L} x_3 \qquad \mathfrak{B}_1 = \Gamma_1' x_1 + \Gamma_2' x_2 + \mathcal{M} x_3$$

$$C_1 = \Gamma_1(\Gamma_1' x_1 + \Gamma_2' x_2 + \mathcal{M} x_3) + \Gamma_2(\Gamma_1'' x_1 + \Gamma_2'' x_2 + \mathcal{N} x_3) + \mathcal{L}(\gamma x_1 + \delta x_2)$$

$$+ x_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} + x_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial v} + x_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \Gamma_1'(\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + \mathcal{L} x_3) - \Gamma_2'(\Gamma_1' x_1 + \Gamma_2' x_2 + \mathcal{M} x_3)$$

$$- \mathcal{M}(\alpha x_1 + \beta x_2) - x_1 \frac{\partial \Gamma_1'}{\partial u} - x_2 \frac{\partial \Gamma_2'}{\partial u} - x_3 \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u}.$$

Dieser Ausdruck sowie die analogen für C_2 und C_3 sind aber, wie in der Flächentheorie gezeigt wird, mit den linken Seiten der Fundamentalgleichungen identisch, also null. C_4 und C_5 sind identisch 0, weil $A_4=1$, $\mathfrak{B}_4=0$ ist. Es ist also

$$C(F)=0,$$

d. h. das System (B) ist ein Jacobi'sches. Da nun $n=5$ die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen $m=2$ die der Gl'en ist, so hat das System 3 unabhängige Lösungen,

welche in die Form

(C.) $\mathfrak{F}_1(x_1, x_2, x_3, u, v) = a_1 \quad \mathfrak{F}_2(x_1, x_2, x_3, u, v) = a_2 \quad \mathfrak{F}_3(x_1, x_2, x_3, u, v) =$

gesetzt werden können. Aus ihnen können x_1, x_2, x_3 als Functionen von u und v berechnet werden.

Es ist allerdings noch zu beweisen, dass diese Functionen auch wirklich den Diff. Gl-en (B) genügen. Es sei zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = A_1 \quad \frac{\partial x_2}{\partial u} = A_2 \quad \frac{\partial x_3}{\partial u} = A_3$$

gesetzt. Aus (C.) folgt:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u} = 0$$

. . - - - - - - - - - - - . .

Die Gl-en (B) können bei passender Bezeichnung der Grössen A geschrieben werden

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_3} A_3 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} = 0;$$

sie gelten für $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Durch Subtraction erhalten wir:

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial x_\lambda}{\partial u} - A_\lambda \right) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

Angenommen nun es wäre die Determinante

$$\Delta = \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_\lambda} \right| \qquad (i, \lambda = 1, 2, 3)$$

gleich 0, so bestände die Gleichung $\Delta = 0$ gleichzeitig mit (C). Die Gleichung $\Delta = 0$ würde die Form

$$H(F_1, F_2, F_3, u, v) = 0$$

haben, und die Substitution der Werte a_1, a_2, a_3 für F_1, F_2, F_3 würde eine Beziehung zwischen u und v ergeben, was nicht der Fall sein darf. Es ist also $\Delta \gtrless 0$, folglich

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial u} - A_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

und es befriedigen die aus (C) sich ergebenden Functionen $x_1\ x_2\ x_3$ von u und v auch die Diff. Gl-en (B).

Endlich muss noch nachgewiesen werden, dass die so gefundenen Functionen x_3, y_3, z_3 den Richtungscosinus der Normale gleichgesetzt werden können, welche sich ergiebt, wenn man aus

$$dx = x_1 du + x_2 dv$$

die cartesischen Coordinaten der Fläche sich

hergestellt denkt, ob sich also

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

setzen lässt. Die Aufgabe kommt darauf hinaus nachzuweisen, dass die Grössen $x_1 \cdots x_3,\ y_1 \cdots y_3,\ z_1 \cdots z_3$ den Gl-en

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1\ ,\quad x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0\ ,\quad x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 =$$

genügen, welche nämlich X, Y, Z abgesehen vom Vorzeichen bestimmen. Es würde alsdann leicht sein zu zeigen, dass E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrössen sind, d.h. dass die

$$\sum dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$-\sum dx\,dA = L\,du^2 + \qquad\qquad +$$

bestehen. Doch soll auf diese der Flächentheorie zuzuweisende Aufgabe nicht näher eingegangen werden.

Zweiter Teil Capitel 1.

Unter den partiellen Diff. Gl-en zweiter Ordnung, zu welchen wir jetzt übergehen, sind die einfachsten diejenigen, welche nach denselben Methoden wie die gewöhnlichen integriert werden können. Nehmen wir z.B. die Diff. Gl.

$$1.\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c$$

aus welcher z als Function der beiden unabhängigen Variabeln x und y bestimmt werden soll, so ergiebt sich als erstes Integral:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cx + C.$$

Hier kann für C eine willkürliche Function von y gesetzt werden,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cx + \varphi(y),$$

da man auch aus diesem Ansatze durch Differentiation nach x zu (1) zurückkommt. Es folgt als Integral von (1):

$$1^x \qquad z = \frac{c}{2}x^2 + x\varphi(y) + \psi(y),$$

wo $\psi(y)$ eine neue willkürliche Function ist.

Das Integral wird wegen des Auftretens zweier willkürlichen Functionen das „allgemeine" Integral genannt wie ja auch das Integral $z = \frac{1}{2}cx^2 + Cx + C'$ der gewöhnlichen Diff. Gl. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c$ wegen der zwei vorkommenden Constanten bezeichnet wird.
In gleicher Weise ergiebt sich als Integral der Diff. Gl. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c$ die Function $z = \frac{1}{2}cy^2 + y\,C$ ...
Hier wie in analogen Fällen braucht also die Aufgabe immer nur für eine der beiden Ableitungen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ behandelt zu werden.
Eine besondere Behandlung erfordert die Ableitung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, sodass wir neben (1) noch die Diff. Gl.

$$2. \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = c$$

betrachten müssen. Das erste Integral lautet

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cy + \varphi'(x),$$

wo $\varphi'(x)$ als Ableitung einer willkürlichen Function selbst willkürlich ist. Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$2^*. \qquad z = cxy + \varphi(x) + \psi(y).$$

Aus (1) und (2) ergeben sich für $c = 0$ die Diff. Gl-en sowie die zugehörigen allgem...

Integrale in der Form

1a. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ $\qquad z = x\varphi(y) + \psi(y)$

2a. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ $\qquad z = \varphi(x) + \psi(y)$

Die Ansätze (1) und (2) lassen sich nun leicht verallgemeinern. Es werde im Folgenden zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = q\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

sodass die Diff. Gl.

3. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\frac{\partial z}{\partial x} = B$$

welche wir zunächst behandeln wollen, auch in der Form

$$r + Ap = B$$

geschrieben werden kann. Der nicht verschwindende Coefficient von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ist hierbei $=1$ angenommen worden, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, und es sind A und B gegebene Functionen von x und y, welche also z nicht explicite enthalten. Wir schreiben

für (3.):

$$\frac{\partial p}{\partial x} + Ap = B$$

und erhalten hieraus

$$p = e^{-\int A dx}\left(\int e^{\int A dx} B\, dx + C\right),$$

wo C wieder eine willkürliche Function von [y]
sein kann. Daher ist

$$z = \psi(y) + \int e^{-\int A dx} dx \left(\int e^{\int A dx} B\, dx + \varphi(y)\right) \tag{3.*}$$

das allgemeine Integral der Gl. (3.) —
Auf analoge Weise ergiebt sich aus der Dif[f.-Gl.]

$$\frac{\partial p}{\partial y} + Ap \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial z}{\partial x} = B \tag{4.}$$

als erstes und als allgemeines Integral

$$p = e^{-\int A dy}\left(\int e^{\int A dy} B\, dy + \varphi(x)\right)$$

$$z = \psi(y) + \int e^{-\int A dy}\left(\int e^{\int A dy} B\, dy + \varphi(x)\right) dx. \tag{4.*}$$

Wir gehen nun sogleich zu der
allgemeinsten linearen Diff. Gl. zweit[er]
Ordnung über:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + F = 0 \tag{5.}$$

oder, kürzer geschrieben:

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

indem wir der Symmetrie wegen nicht durch den ersten Coefficienten dividieren. Diese Diff. Gl. lässt sich durch eine von Euler angegebene Transformation auf eine andere derselben Art reducieren, in welcher nur die mittlere der zweiten partiellen Ableitungen auftritt, wenn vorausgesetzt wird, dass A, B, C, D, E Functionen von x und y allein sind. Wir führen nämlich die neuen unabhängigen Variabeln ξ und η ein und erhalten zunächst:

$$p = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

Daraus geht ferner, dass die transformierte Diff. Gl. wieder eine lineare Diff. Gl. zweiter Ordnung ist,

$$A'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + B'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C'\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + D'\frac{\partial z}{\partial \xi} + E'\frac{\partial z}{\partial \eta} + F' = 0,$$

deren Coefficienten folgende Werte haben:

$$
5^a \quad \begin{cases}
A' = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 \\
B' = 2A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + 2C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\
C' = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \\
D' = A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\xi}{\partial x} + E\frac{\partial\xi}{\partial y} \\
E' = \\
F' =
\end{cases}
$$

Die oben angegebene Eigenschaft besitzt also die transformierte Diff. Gl. wenn ξ und η Lösungen der Diff. Gl.

$$6. \qquad A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + C\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0$$

sind, oder, was dasselbe ist, wenn sie als Lösungen der linearen Diff. Gl-en

$$6^a \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

bestimmt werden. Diese Bestimmung geschieht dadurch, dass ξ und η als willkürliche Functionen

$$\xi = \varphi(f_1(x,y)) \quad , \quad \eta = \psi(f_2(x,y))$$

der linken Seiten der Integralgleichungen

$$f_1(x,y) = C_1 \quad , \quad f_2(x,y) = C_2$$

des Systemes gewöhnlicher Diff. Gl-en

$$\frac{dx}{1} = dy : \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

angenommen werden, z. B.

6x $$\xi = f_1(x,y) \qquad \eta = f_2(x,y)$$

Die Annahme dieser Grössen als unabhängiger Variabeln transformiert die Diff. Gl. (5.) in die einfachere folgende:

7. $$B' \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + D' \frac{\partial z}{\partial \xi} + E' \frac{\partial z}{\partial \eta} + F' = 0,$$

deren Coefficienten aus (5-a.) zu entnehmen sind.

Für die Diff. Gl. der schwingenden Saiten z. B.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

oder

$$t - m^2 r = 0$$

hat man

$$A = -m^2 , \quad B = 0 , \quad C = 1 , \quad D = E = F = 0,$$

$$dx = \pm m\, dy \qquad \xi = x + my \qquad \eta = x - my$$

$$D' = 0 , \qquad E' = 0 , \qquad F' = F = 0,$$

und es lautet die transformierte Diff. Gl.

$$B' \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

oder, da B' von Null verschieden ist,

$$s = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Diff. Gl. is[t]

$$z = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

also das der ursprünglichen

$$z = \varphi(x + my) + \psi(x - my)$$

Bei der durch (6ˣ) angedeuteten Transformation muss angenommen werden, dass das System (6ᵃ) zwei voneinander unabhäng[ige] Integrale besitzt. Es muss daher der Fall

8. $$B^2 - 4AC = 0$$

welcher die letztere Bedingung ausschl[iesst] besonders behandelt werden. Wegen $C = B^2/4A$ folgt aus (5ᵃ):

$$A' = \frac{1}{4A}\left\{4A^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 4AB\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + B^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$C' = \quad - \; - \; - \; -$$

oder

$$A' = \frac{1}{4A}\left(2A\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$C' = \frac{1}{4A}\left(2A\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

und ferner auf analoge Weise:

$$B' = \frac{1}{2A}\left(2A\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(2A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right).$$

Hieraus folgt, dass zugleich mit A' oder C' auch B' verschwindet. Wenn wir also, um z. B. C' zum Verschwinden zu bringen, η aus der Diff. Gl.

9. $$2A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

oder der zugehörigen gewöhnlichen Diff. Gl.

9ª $$\frac{dx}{2A} = \frac{dy}{B}$$

bestimmen, während ξ willkürlich angenommen werden kann, wenn wir also, falls $f(x,y) = \overline{C}$ die Integralgleichung von (9ª) ist,

9ˣ $$\xi = x \quad , \quad \eta = f(x,y)$$

annehmen, so geht die Diff. Gl. (5.) über in:

10. $$A'\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + D'\frac{\partial z}{\partial\xi} + E'\frac{\partial z}{\partial\eta} + F' = 0.$$

Die Determinante $B^2 - 4AC$ von (6.) verschwindet z. B. für die Diff. Gl.

$$x^2 r + 2xy\, s + y^2 t = 0.$$

Aus

$$\frac{dx}{2x^2} = \frac{dy}{xy}$$

folgt

$$\frac{y}{x} = C$$

sodass

$$\xi = x \quad , \quad \eta = \frac{y}{x}$$

die Transformationsgl-en sind. In den transformierten Diff. Gl-en könnten nun vielleicht auch die Differentialquotienten erster Ordnung auftreten. Es ist aber D'=0, wie aus (5ᵃ) folgt, weil D = E = 0; ferner ist F' = F = 0, und endlich

$$E' = A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = x^2\left(-\frac{2y}{x^3}\right) + 2xy\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ldots$$

Die transformierte Diff. Gl. lautet daher

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

und hat nach (1ᵃ) das allgemeine Integral

$$z = x\,\varphi(\eta) + \psi(\eta);$$

daher ist

$$z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

das allgemeine Integral der ursprunglichen Diff. Gl.

Es ist endlich nötig, den Fall zu untersuchen, in welchem A oder C verschwindet.

Diese beiden Fälle sind gleichberechtigt, weil die zu (6a) gehörige Diff. Gl. in der Form

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

geschrieben werden kann, aus welcher durch Vertauschung der Variabeln die Gl.

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - B\frac{dx}{dy} + A = 0$$

hervorgeht. Indem wir also z. B. nur den Fall $C = 0$ betrachten, gehen wir auf die partiellen Diff. Gl-en

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

zurück, welche für $C = 0$ lauten:

(a) $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{B}{A}\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ (b) $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$.

Die zu (a) gehörige gewöhnliche Diff. Gl.

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}$$

habe die Integralgleichung $f(x,y) = \bar{C}$, so ist zu setzen:

$$\xi = f(x,y);$$

die Gleichung (b) welche η bestimmt,

sagt aus, dass η eine Function von y allein wird; es kann daher

$$\eta = y$$

gesetzt werden. Der Fall $C=0$ führt demn[ach] auf die transformierte Gl. (7.) zurück.

Es lässt sich also die Diff. Gl.

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + F = 0,$$

jenachdem $B^2 - AC \gtrless 0$ oder $=0$ ist, in die D[iff. Gl.]

$$B'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + D'\frac{\partial z}{\partial \xi} + E'\frac{\partial z}{\partial \eta} + F' = 0$$

oder in die Diff. Gl.

$$A'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + D'\frac{\partial z}{\partial \xi} + E'\frac{\partial z}{\partial \eta} + F' = 0,$$

transformieren, in die erstere unter der Voraussetzung $B^2 - AC \gtrless 0$ auch dann wenn $A=0$ oder $C=0$ ist.

Capitel 2

Für die allgemeine Untersuchung am wichtigsten ist die erste Form der transformierten Diff. Gl., welche wir nach Division mit der (wegen (5a)) nicht verschwindenden Function B' folgendermassen schreiben:

11. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + f = 0.$$

Es sind also a, b Functionen von x und y, f eine Function von x, y, z. Durch die Substitution

11a $$\frac{\partial z}{\partial y} + az = z_1$$

geht die Diff. Gl. (11) über in:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - z\frac{\partial a}{\partial x} + b(z_1 - az) + f = 0$$

oder, wenn $f = c \cdot z$, wo c eine Function von x und y, angenommen wird, wenn wir also von der Diff. Gl.

12. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

ausgehen, in

12a. $$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 - hz = 0$$

13. $$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$$

Ist nun $h=0$, so kann die Integration vo[n]
(12) offenbar auf die successive Integratio[n]
der beiden linearen Diff. Gl-en erster Ordn[ung]
(12^a) und (11^a) zurückgeführt werden.
Die Einsetzung des aus (12^a) folgenden Wer[thes]
$z_1 = \psi(y) e^{-\int b dx}$ in (11^a) ergiebt die Diff. Gl.

$$\frac{\partial z}{\partial y} + a z = \psi(y) e^{-\int b \, dx},$$

aus welcher folgt

$$z = e^{-\int a \, dy} \left[\varphi(x) + \int e^{\int a dy} \psi(y) e^{-\int b dx} dy \right], \tag{14.}$$

das allgemeine Integral von (12) für die Annahme $h=0$.

Ein hierauf bezügliches Beispiel, welche[s]
sich bei Euler (Institutiones calculi integr[alis])
findet, bietet die Diff. Gl.

$$s + \frac{\beta}{y} p + \frac{\alpha}{x} q + \frac{\alpha\beta}{xy} = 0,$$

für welche

$$a = \frac{\beta}{y}, \quad b = \frac{\alpha}{x}, \quad c = \frac{\alpha\beta}{xy},$$

$h=0$ ist. Aus $\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\alpha}{x} z_1 = 0$ folgt $z_1 = \psi(y) x^{-\alpha}$, u[nd]
weiter aus $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\beta}{y} z = \psi(y) x^{-\alpha}$

$$z = y^{-\beta} \left(\varphi(x) + \int y^{\beta} \psi(y) x^{-\alpha} dy, \right.$$

oder, wenn

$$\int y^\beta \psi(y)\, dy = \psi_1(y) \quad , \quad \varphi(x)\, x^\alpha = \varphi_1(x)$$

gesetzt wird:

$$z = \frac{\varphi_1(x) + \psi_1(y)}{x^\alpha\, y^\beta}$$

wo $\varphi_1(x), \psi_1(y)$ ebenfalls willkürliche Functionen sind.

Die Diff. Gl. (12) bleibt ungeändert, wenn x mit y und gleichzeitig a mit b vertauscht wird; daraus geht hervor, dass die Integration auch dann auf zwei successive Quadraturen zurückführbar ist, wenn die Grösse

15. $$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

verschwindet.

Die für das Integrationsproblem charakteristischen Grössen h und k haben nun die wichtige Eigenschaft, sich nur um einen Factor (der in besonderen Fällen auch $=1$ werden kann) zu ändern, falls auf (12) die Transformation

$$\xi = f_1(x) \qquad \eta = f_2(y)$$

angewendet wird, vorausgesetzt, dass f_1 und f_2 keine Ableitungen enthalten. Durch eine Transformation von der Form $\xi = f_1(x,y)$, $\eta = f_2(x,y)$ kann dies, wie von

vornherein klar, nicht erreicht werden, da durch sie eine Diff. Gl. erhalten würde, welche im allgemeinen auch $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$ enthalten würde. Zum Beweise des angege[benen] Satzes bilden wir

$$p = \frac{\partial z}{\partial \xi} \xi' \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta} \eta'$$

und erhalten, da $\frac{\partial \xi'}{\partial y} = 0$ ist, die transformiert[e]

$$\xi' \eta' \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + a \xi' \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \eta' \frac{\partial z}{\partial \eta} + c z = 0,$$

sodass, wenn noch $a' = \frac{a}{\eta'}$, $b' = \frac{b}{\xi'}$, $c' = \frac{c}{\xi' \eta'}$ gesetzt wird,

$$h' = \frac{\partial a'}{\partial \xi} + a'b' - c' = \frac{1}{\xi' \eta'} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{ab}{\xi' \eta'} - \frac{c}{\xi' \eta'} = \frac{a}{\xi' \eta'}$$

und ebenso

$$k' = \frac{1}{\xi' \eta'}$$

erhalten wird.

Es soll jetzt auch z geändert, nämlich

$$z = f(z')$$

gesetzt werden. Da $p = f(z') \frac{\partial z'}{\partial x}, \ldots$ ist, so aus (12):

$$f''(z') \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial x} + f'(z') \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \cdots\cdots = 0,$$

es muss also, wenn die transformierte Di[ff. Gl.] ebenfalls linear sein soll, $f''(z') = 0$,

$$f(z') = A z' + B.$$

sein. Dieser Ansatz kann also nur dadurch verallgemeinert werden, dass A und B als Functionen von x und y angenommen werden

$$f(z) = Pz' + Q$$

und hierfür kann man durch Zerlegung schreiben:

$$\varsigma = Pz' \quad , \quad z = \varsigma + Q$$

Soll jetzt die zweite Transformation $z = \varsigma + Q$ wieder auf eine Gleichung der Form (12) führen, so muss Q eine partikuläre Lösung von (12) , es muss

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial Q}{\partial y} + c Q = 0$$

sein; alsdann lautet die transformierte Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + b \frac{\partial \varsigma}{\partial y} + c \varsigma = 0,$$

für welche h und k natürlich dieselben Werte haben wie für (12). Wir können für ς wieder z schreiben und erhalten weiter aus $z = Pz'$, $\frac{\partial z}{\partial x} = P \frac{\partial z'}{\partial x} + z' \frac{\partial P}{\partial x}$:

$$P \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + z' \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} + a \left(P \frac{\partial z'}{\partial x} + z' \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$
$$+ b \left(P \frac{\partial z'}{\partial y} + z' \frac{\partial P}{\partial y} \right) + c P z' = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + a' \frac{\partial z'}{\partial x} + b' \frac{\partial z'}{\partial y} + c' z' = 0 ;$$

dabei ist

$$a' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + a , \quad b' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + b , \quad c' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + \frac{a}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{b}{\rho} \ldots$$

$$h' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{a}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{b}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + ab$$
$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} - \frac{a}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - c$$

$$k' = \quad - \quad - \quad \cdot \quad \cdot \quad - \quad - \quad -$$

$$h' = h , \qquad k' = k .$$

Wir wollen nach diesem Ergebnisse die für Integration durch Quadraturen charakteristischen Ausdrücke h und k die Invarian[ten] der Diff. Gl. (12) nennen.

Wenn h und k von Null verschieden sin[d], können wir aus der durch die Substitution

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = z_1$$

transformierten Diff. Gl. (12),

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 - hz = 0$$

eine Bestimmungsgleichung für z herleiten.

$$z = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1\right)$$

folgt durch Einsetzung in die Substitutionsgleichung:

$$\frac{1}{h}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{b}{h}\frac{\partial z_1}{\partial y} + z_1 \frac{\partial\left(\frac{b}{h}\right)}{\partial y} + \frac{a}{h}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1\right) - z_1 = 0$$

oder

16. $$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0$$

Hierbei ist

$$a_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} + a \qquad b_1 = b \qquad c_1 = h\frac{\partial\left(\frac{b}{h}\right)}{\partial y} + ab - h$$

$$= c + k - h - b\frac{\partial \log h}{\partial y}$$

$$h_1 = -\frac{\partial^2 \log h}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{b}{h}\frac{\partial h}{\partial y} + ab - h\frac{\partial\left(\frac{b}{h}\right)}{\partial y} - ab + h$$

$$= \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + h - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}$$

$$k_1 = \frac{\partial b}{\partial y} + h - \frac{\partial b}{\partial y}$$

16* $$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \quad k_1 = h$$

Die Diff. Gl-en (12) und (16) haben einen engen Zusammenhang. Ist ein Integral z von (12) bekannt, so ergiebt sich z_1 und die Diff. Gl. für z_1 nach der soeben angewandten Methode durch Differentiation. Wenn umgekehrt, was für unser ursprüngliches Integrationsproblem wichtig ist, z_1 ein bekanntes

Integral von (16) ist, so ergiebt sich z durch eine Quadratur.
Diese letzte Transformation ist deshalb von Bedeutung, weil eine der Invarianten von (16) verschwinden kann, auch wenn dies nicht für (12) der Fall ist; alsdann kann also das allgemeine Integral von (12) durch Quadraturen bestimmt werden.
Die Grösse h_1 verschwindet z. B. für die Di

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

da für sie

$$a = b = -\frac{1}{x+y}, \quad c = 0, \quad h = \frac{2}{(x+y)^2} = k, \quad h_1 = h - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} =$$

ist. Es wird

$$a_1 = \frac{1}{x+y}, \quad b_1 = -\frac{1}{x+y}, \quad c_1 = -\frac{2}{(x+y)^2},$$

also lautet die transformierte Gleichung

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x+y}\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{x+y}\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{2 z_1}{(x+y)^2} = 0.$$

Letztere wird durch die Substitution

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + a_1 z_1 = z_2$$

in die durch eine Quadratur integrierb

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} + b_1 z_2 = 0$$

übergeführt, welche auch $\frac{\partial z_2}{z_2} = \frac{dx}{x+y}$ geschri

werden kann und deshalb das Integral $z_2 = \psi(y)(x+y)$ besitzt. Es folgt

$$z_1 = e^{-\int\frac{dy}{x+y}}\left(\varphi(x) + \int e^{\int\frac{dy}{x+y}}(x+y)\,\psi(y)\,dy\right.$$

$$= \frac{1}{x+y}\left(\varphi_1(x) + \int (x+y)^2\psi_1(y)\,dy\right);$$

hieraus würde sich z durch Differentiation ergeben. Wir setzen aber, um einen eleganteren Ausdruck zu erhalten,

$$\psi_1(y) = \chi'''(y),$$

und erhalten unter Benutzung der Identitäten

$$\int (x+y)^2\chi'''(y)\,dy = (x+y)^2\chi''(y) - 2\int \chi''(y)(x+y)\,dy$$

$$\int (x+y)\,\chi''(y)\,dy = (x+y)\,\chi'(y) - \chi(y):$$

$$(x+y)\,z_1 = \varphi_1(x) + (x+y)^2\chi''(y) - 2(x+y)\,\chi'(y) + 2\,\chi(y)$$

wo χ ebenfalls eine willkürliche Function ist. Jetzt wird

$$z = \tfrac{1}{2}(x+y)^2\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{x+y}\,z_1\right) = \tfrac{1}{2}(x+y)\left((x+y)\frac{\partial z_1}{\partial x} - z_1\right)$$

$$(x+y)\frac{\partial z_1}{\partial x} + z_1 = \varphi_1'(x) + 2(x+y)\,\chi''(y) - 2\,\chi(y)$$

$$\frac{2z}{x+y} = \varphi_1'(x) + 2\,\chi'(y) - \frac{2\,\varphi_1(x)}{x+y} - \frac{4\,\chi(y)}{x+y}$$

$$2z = (x+y)\left(\varphi_1'(x) + 2\,\chi'(y)\right) - 2\varphi_1(x) - 4\,\chi(y),$$

oder, wenn $\varphi_1 = 2\varphi$, $\chi = \psi$ gesetzt wird:

$$z = (x+y)\left(\varphi'(x) + \psi'(y)\right) - 2\left(\varphi(x) + \psi(y)\right).$$

Es ist bemerkenswert, dass in diesem Ausdruck des allgemeinen Integrals auch die Ableitungen der beiden willkürlichen Functionen auftreten. Wenn in (16^x) die Invariante h_1 nicht verschwindet — was von $k_1 = h_1$ vorausgesetzt ist — so kann auf die Diff. Gl. (16) wieder die Transformation

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + a_1 z_1 = z_2$$

angewandt werden, sodass sich

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} + b_1 z_2 - h_1 z_1 = 0\,, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + a_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z_2}{\partial y} + c_2 z_2 = 0$$

ergiebt; dabei wird $b_2 = b$, $k = h_1$, $h_2 = 2h_1 - h - \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial}$
Es werde allgemein angenommen, eine solche Transformation sei $(n-1)$ mal angestellt und es seien

$$h_1, h_2 \ldots\ldots h_{n-1}$$

von Null verschieden, sodass für $k_1, k_2 \ldots k_n$ dasselbe gilt unter der Voraussetzung $h, k \gtrless$
Durch die Substitution

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + a_{n-1} z_{n-1} = z_n$$

geht die $(n-1)$^{te} Transformierte über in

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} + b_{n-1} z_n - h_{n-1} z_{n-1} = 0$$

und es folgt durch Elimination von z_{n-1}:

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + a_n \frac{\partial z_n}{\partial x} + b_n \frac{\partial z_n}{\partial y} + c_n z_n = 0,$$

wo $b_n = b \quad k_n = h_{n-1} \quad h_n = 2h_{n-1} - h_{n-2} - \frac{\partial^2 \log h_{n-1}}{\partial x \partial y}$.
Da k_n sicher $\gtrless 0$ ist, so kommt es nur auf die erste Invariante an.
Wir wollen eine Anwendung der vorstehenden Sätze auf die berühmte Euler'sche Gl.

$$r - a^2 t + \frac{mz}{x^2} = 0$$

machen. Diese geht zunächst durch die Substitutionen $\xi = y + ax \quad \eta = y - ax$, welche aus den Integralen $y = \pm ax$ der Diff. Gl. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$ entnommen werden, über in die Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{mz}{(\xi - \eta)^2} = 0.$$

Diese Diff. Gl. hängt mit der flächentheoretischen Aufgabe zusammen, alle Flächen zu bestimmen, für welche die Summe der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte proportional ist dem Abstande der Tangentialebene von einem festen Punkte. Diese Flächen haben in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, weil sie insofern mit der Theorie der Abwickelung eng zusammen-

hängen, als für jeden Wert von a, für welch[e]
der Forderung der Aufgabe, nämlich der G[l.]

$$\rho_1 + \rho_2 = aP \equiv a(xX + yY + zZ)$$

— wenn der feste Punkt zum Anfangspunkt gewählt wird — genügt wird, damit au[ch] jedesmal eine Klasse aufeinander abwic[k]elbarer Flächen bekannt ist (vgl. die Arb[eiten] von Appell, Baroni, Goursat, Weingarten). Es soll gezeigt werden, dass das genannt[e] Problem auf unsere Diff. Gl. zweiter Ordnung führt. Bezeichnet $d\sigma$ das Linienelement der Gauss'schen Kugel, und wird

$$d\sigma^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

gesetzt, so kann man $\rho_1 + \rho_2$ bekanntlich durch P und seinen inbezug auf die Form $d\sigma^2$ gebildeten Differentialparame[ter] zweiter Ordnung $\Delta_e^2 P$ in der Form

$$\rho_1 + \rho_2 = -2P + \Delta_e^2 P$$

darstellen, wo also

$$\Delta_e^2 P = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial P}{\partial u} - F\frac{\partial P}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial P}{\partial v} - F\frac{\partial P}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)$$

ist. Aus $\rho_1 + \rho_2 = aP$ folgt also

$$\Delta_e^2 P = b P \qquad (b = a+2)$$

als Bestimmungsgleichung der Flächenklasse. Wir vereinfachen sie durch specielle Wahl des Coordinatensystemes. Es seien s, s_1 conjugiert complexe Grössen; indem wir nun

$$\frac{X + iY}{1 - Z} = s \quad \text{also} \quad \frac{X - iY}{1 - Z} = s_1$$

setzen und die Gleichung $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ hinzunehmen, erhalten wir

$$X = \frac{s + s_1}{1 + ss_1}, \quad Y = i\,\frac{s_1 - s}{1 + ss_1}, \quad Z = \frac{ss_1 - 1}{1 + ss_1},$$

und weiter für $s = u$, $s_1 = -\frac{1}{v}$:

$$X = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad Y = i\,\frac{1 + uv}{u - v}, \quad Z = \frac{u + v}{u - v}.$$

Hieraus folgt $d\sigma^2 = \frac{4\,du\,dv}{(u-v)^2}$, also

$$E = 0, \quad F = \frac{2}{(u-v)^2}, \quad G = 0,$$

und da $\sqrt{EG - F^2} = iF$ gesetzt werden kann,

$$\Delta_e^2 P = \frac{2}{F}\,\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = (u-v)^2\,\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}$$

Die Flächenklasse ist also bestimmt durch die Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} - \frac{bP}{(u-v)^2} = 0,$$

welche bis auf die Bezeichnung mit der Euler'schen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{m z}{(x-y)^2} = 0$$

identisch ist. Um nun einen speciellen Fa[ll] zu suchen, in welchem diese Diff. Gl. allgemein integrirt werden kann, setzen wir an:

$$a = b = 0 \qquad c = -\frac{m}{(x-y)^2} \qquad h = \frac{m}{(x-y)^2} = k$$

und bilden

$$h_1 = \frac{m+2}{(x-y)^2}, \quad h_2 = \frac{m+6}{(x-y)^2} = h_1 + \frac{4}{(x-y)^2}, \dots$$

$$h_n = h_{n-1} + \frac{2n}{(x-y)^2}, \dots$$

ein Inductionsschluss, dessen Richtigkei[t] leicht dargethan wird.
Aus der durch Addition sich ergebende[n] Formel

$$h_n = \frac{m + n(n+1)}{(x-y)^2}$$

folgt, dass die Diff. Gl'en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{n(n+1)}{x^2} z = 0$$

für jeden positiven ganzzahligen Wert von n allgemein integrierbar sind. Für den speciellen Fall $n=1$ kann hieraus eine oben (S. 198) integrierte Diff. Gl. erhalten werden. Indem wir nämlich die Transformation $z = x^\alpha \varsigma$, welche die Invarianten nicht ändert, anwenden, also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^\alpha \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \alpha x^{\alpha-1} \varsigma, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^\alpha \frac{\partial \varsigma}{\partial y}$$

setzen, folgt

$$x^\alpha \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + 2\alpha x^{\alpha-1} \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \varsigma - a^2 x^\alpha \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} - n(n+1) x^{\alpha-2} \varsigma = 0.$$

Wird jetzt $\alpha(\alpha-1) - n(n+1) = 0$, d. h. wird

$$\alpha = n+1 \quad \text{oder} \quad \alpha = -n$$

angenommen, so fällt das mit ς multiplicierte Glied weg, und die transformierte Diff. Gl. nimmt die Form

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} + \frac{2(n+1)}{x} \frac{\partial \varsigma}{\partial x} = 0$$

oder die Form

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} - \frac{2n}{x} \frac{\partial \varsigma}{\partial x} = 0$$

an, jenachdem die Substitution

$$z = x^{n+1} \varsigma \quad \text{oder} \quad z = x^{-n} \varsigma$$

angewendet wird. Wenn jetzt $\xi = y + ax, \eta = y$ [...]
und $n = 1$ gesetzt wird, so geht die letzte Diff. [...]
über in
$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\xi - \eta}\left(\frac{\partial \varsigma}{\partial \xi} - \frac{\partial \varsigma}{\partial \eta}\right) = 0,$$
aus welcher, wie behauptet
$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial y} - \frac{1}{\tau + y}\left(\frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$
folgt, wenn $\varsigma = z$, $\xi = \tau$, $\eta = -y$ gesetzt wird.
Es sei die Laplace'sche[x] Diff. Gl.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$
durch n malige Transformation in die Dif[f. Gl.]
$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + a_n\frac{\partial z_n}{\partial x} + b\frac{\partial z_n}{\partial y} + c_n z_n = 0$$
übergeführt. Letztere, welche durch die n[te]
Transformation
$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + a_{n-1} z_{n-1} = z_n$$
erhalten wird, kann in die Form
$$\frac{\partial z_n}{\partial x} + b z_n - h_{n-1} z_{n-1} = 0$$
gesetzt werden, und sie wird umgekehrt d[urch]
Elimination von z_{n-1} aus diesen beiden Gl-en
erhalten.

[x] Hist. de l'Acad. des Sciences, 1773. Vgl. Darbo[ux]
Leçons, t. II.

Wir wollen jetzt einen allgemeinen Ausdruck für z aufstellen, wenn das Integral z_n der n^{ten} Transformierten als bekannt angesehen wird. Zur Erreichung dieses Zieles dient die Invarianteneigenschaft des Coefficienten b für die gemachten Transformationen.

Aus der Beziehung $h_{n-1} z_{n-1} = \frac{\partial z_n}{\partial x} + b z_n$ folgt

$$e^{\int b dx} h_{n-1} z_{n-1} = e^{\int b dx} \left(\frac{\partial z_n}{\partial x} + b z_n \right),$$

$$h_{n-1} e^{\int b dx} z_{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int b dx} z_n \right).$$

Ebenso ist

$$h_{n-2} e^{\int b dx} z_{n-2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int b dx} z_{n-1} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h\, e^{\int b dx} z = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int b dx} z_1 \right),$$

und wir erhalten sofort:

$$17. \qquad z = e^{-\int b dx} \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int b dx} z_n \right)$$

Das Integral der Laplace'schen Diff. Gl. (12) kann also aus dem ihrer n^{ten} Transformierten durch n malige Differentiation erhalten werden.

Es sei

$$e^{\int b dx} = B, \quad \frac{\partial}{\partial x}(B z_n) = B \frac{\partial z_n}{\partial x} + z_n \frac{\partial B}{\partial x}$$

gesetzt, so wird

$$z_{n-1} = u z_n + u_1 \frac{\partial z_n}{\partial x}$$

$$z_{n-2} = v z_n + v_1 \frac{\partial z_n}{\partial x} + v_2 \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$z = \lambda z_n + \lambda_1 \frac{\partial z_n}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \lambda_n \frac{\partial^n z_n}{\partial x^n},$$

wo $\lambda, \lambda_1 \cdots \lambda_n$ bekannte Functionen von x und y sind, und diese Formel für z ist unabhängig von der zur Ermittelung von z_n angewandten Integrationsmethode. Wir wollen nun annehmen, es sei die n^{te} Transformierte nach der Euler'schen Methode, d. h. durch Quadraturen, integrierbar, also $h_n = 0$ (während $k_n = h_{n-1}$ naturgemäss als von Null verschieden angenommen wird.)

Alsdann ist nach (14):

$$z_n = e^{-\int a_n dy}\left(\varphi(x) + \int e^{\int a_n dy - \int b\, dx} \cdot \psi(y)\, dy\right)$$

$$= \alpha\left(\varphi(x) + \int \beta\, \psi(y)\, dy\right).$$

wo α, β bekannte Functionen von x und y, $\varphi(x), \psi(y)$ willkürliche Functionen ihres Argumentes sind. Hieraus folgt

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = \alpha\left(\varphi'(x) + \int \frac{\partial \beta}{\partial x}\psi(y)\,dy\right) + \left(\varphi(x) + \int \beta\,\psi(y)\,dy\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} = \alpha\left(\varphi''(x) + \int \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\psi(y)\,dy\right) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und wir erkennen, dass z sich homogen und linear durch die Ausdrücke

$$\varphi^{(i)}(x) + \int \frac{\partial^i \beta}{\partial x^i}\psi(y)\,dy$$

darstellen lässt, weil z eine homogene lineare Function der Ableitungen $\frac{\partial^i z}{\partial x^i}$ und diese homogene lineare Functionen jener Klammergrössen sind:

18. $$z = u\left(\varphi(x) + \int \beta\,\psi(y)\,dy\right) + u_1\left(\varphi'(x) + \int \frac{\partial \beta}{\partial x}\psi(y)\,dy\right) + \cdots\cdots + u_n\left(\varphi^{(n)}(x) + \int \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n}\psi(y)\,dy\right);$$

hier sind $u, u_1, \ldots u_n$ bekannte Functionen von x und y.

Aus dieser für $h_n = 0$ geltenden Darstellung ergiebt sich für $\psi(y) = 0$ die particuläre Lösung

18ˣ $$z = u\,\varphi(x) + u_1\,\varphi'(x) + \cdots + u_n\,\varphi^{(n)}(x)$$

Wir wollen jetzt umgekehrt zeigen, dass, falls eine Laplace'sche Diff. Gl. ein Integral dieser Form besitzt, wo $u, u_1, \ldots u_n$ bestimmte, jedoch gewissen sogleich näher

anzugebenden Bedingungen genügende Functionen sind, φ jedoch eine willkürliche Function ist, diese Gl. nach höchstens n Transformationen integrabel wird, d. h. $h_n = 0$[illegible]

Die Diff. Gl. sei

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Aus (18^x) folgt, wenn, wie vorausgesetzt werden soll, die willkürliche Function Ableitungen bis zur $(n+1)$ten Ordnung besitzt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u\,\varphi'(x) + u_1\,\varphi''(x) + \cdots\cdots + u_n\,\varphi^{(n+1)}(x) + \varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x)\frac{\partial u}{\partial y} + \varphi'(x)\frac{\partial u_1}{\partial y} + \cdots\cdots + \varphi^{(n)}(x)\frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Die Einsetzung in die Diff. Gl. ergiebt also:

$$\varphi(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \varphi'(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \cdots + \varphi^{(n)}(x)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\varphi'(x) + \cdots\cdots + \frac{\partial u_n}{\partial y}\varphi^{(n+1)}$$
$$+ a\left(u\,\varphi'(x) + \cdots + u_n\,\varphi^{(n+1)}(x)\right) + a\left(\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cdots + \varphi^{(n)}(x)\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)$$
$$+ b\left(\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial y} + \cdots + \varphi^{(n)}(x)\frac{\partial u_n}{\partial y}\right) + c\left(u\,\varphi(x) + u_1\,\varphi'(x) + \cdots + u_n\,\varphi^{(n)}\right)$$

oder

$$v\,\varphi(x) + v_1\,\varphi'(x) + \cdots + v_n\,\varphi^{(n)}(x) + v_{n+1}\,\varphi^{(n+1)}(x) = 0,$$

und es kann nach bekannten Methoden gezeigt werden, dass

$$v = v_1 = v_2 = \cdots = v_{n+1} = 0$$

sein muss; diese Gl.en ergeben die vorerwähnten

Relationen, welche zwischen $u, u_1, \ldots u_n$ bestehen müssen.

Wenn wir nun auf die Diff. Gl. die erste Transformation

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az$$

anwenden, so lautet in dem Ausdrucke von z_1 der Coefficient von $\varphi^{(n)}(x)$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} + a u_n \equiv v_{n+1} = 0,$$

und daher hat z_1 die Form

$$z_1 = \rho\varphi(x) + \rho_1\varphi'(x) + \ldots + \rho_{n-1}\varphi^{(n-1)}(x).$$

Das Glied mit $\varphi^{(n-1)}(x)$ fällt aber im allgemeinen nicht fort; denn sein Coefficient in z_1 ist

$$\rho_{n-1} = \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + a u_{n-1},$$

es ist aber

$$v_n = 0 = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + a\left(u_{n-1} + \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) + b\frac{\partial u_n}{\partial y} + c u_n,$$

und da wegen $v_{n+1} = 0$ $\frac{\partial u_n}{\partial y} = -a u_n$ ist:

$$-a\frac{\partial u_n}{\partial x} - u_n\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + a u_{n-1} + a\frac{\partial u_n}{\partial x} - ab u_n + c u_n = 0$$

$$\rho_{n-1} = u_n\left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right) = u_n h.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung, da u_n als von Null verschieden angenommen ist

und andererseits für $h=0$ schon die Ausga[ngs]gleichung integrabel wäre. – Wird auf di[ese] Weise fortgefahren, so ergiebt sich für z_i ei[n] Ausdruck welcher in den Grössen $\varphi(x), \varphi'(x) \ldots$ homogen und linear ist und $\varphi^{(n-i)}(x)$ noch enthält, falls $h_1 \ldots h_{n-i}$ nicht null sind.
Schliesslich ergiebt sich

$$z_n = \sigma \cdot \varphi(x);$$

da durch diesen Ansatz die n^{te} Transformie[rte]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a_n \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z_n}{\partial y} + c_n z_n = 0$$

befriedigt werden soll, so muss die Gleich[ung]

$$\varphi(x) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \varphi'(x) + a_n \sigma \varphi'(x) + a_n \varphi(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + b \varphi(x) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + c_n \sigma \varphi(x) =$$

stattfinden. Ihre linke Seite ist homogen u[nd] linear in den Grössen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, es muss a[lso]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \sigma a_n = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + a_n \frac{\partial \sigma}{\partial x} + b \frac{\partial \sigma}{\partial y} + c_n \sigma = 0$$

sein; die zweite dieser Gl^en verwandelt si[ch] durch $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\sigma a_n$ in

$$h_n \sigma = 0,$$

woraus, da $\sigma \gtrless 0$, $h_n = 0$ folgt.
Wir haben bisher auf die Laplace'sche Gleich[ung]

$$G \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

immer die Transformation

I $$\frac{\partial z}{\partial y} + az = z_1$$

angewandt und sie dadurch successive in

$$G_1, G_2 \ldots\ldots\ldots G_n \ldots\ldots$$

übergeführt. Es war z. B.

$$G_1 \equiv \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1\frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0,$$

$$a_1 = a - \frac{\partial \log h}{\partial y},\ b_1 = b,\ c_1 = k - h + c - b\frac{\partial \log h}{\partial y},\ h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y},\ k_1 = h.$$

Auf dieselbe Weise kann die Substitution

II $$\frac{\partial z}{\partial x} + bz = z'$$

auf G angewandt, zur Herstellung von

$$G', G'', \ldots\ldots\ldots G^{(n)} \ldots\ldots$$

dienen, wobei z. B.

$$G' \equiv \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + a'\frac{\partial z'}{\partial x} + b'\frac{\partial z'}{\partial y} + c'z' = 0,$$

$$a' = a,\ b' = b - \frac{\partial \log k}{\partial x},\ c' = h - k + c - a\frac{\partial \log k}{\partial x},\ h' = k,\ k' = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}$$

ist. Durch abwechselnde Anwendung der Transformationen (I) und (II) aber werden keine wesentlich neuen Gleichungsformen erhalten werden. Um die durch (II) aus G_1 folgende Verbindung G_1' zu erhalten, muss

nämlich

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 z_1 = z_1'$$

oder, weil $b_1 = b$,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 = z_1'$$

eingeführt werden. Durch (I) geht $G = 0$ über in

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 - h z = 0,$$

und aus dieser Gl. folgt zusammen mit (I) die Ausgangsgleichung $G = 0$ durch Elimination von z, die Gleichung $G_1 = 0$ durch Elimination von z_1. Die zuletzt geschriebenen beiden Gl. stimmen miteinander überein, wenn $z_1' = hz$ gesetzt wird; die Elimination von z_1 aus $G_1 = 0$ und der Gl. $\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 = z_1'$ muss also ein Ergebnis liefern, welches aus der Gl. $G = 0$ durch die Substitution $z_1' = hz$ oder

$$z = \frac{1}{h} z_1'$$

hervorgeht. Da eine solche Substitution aber die Invarianten nicht ändert, so kann sie für unser Problem keine Bedeutung haben. Auf dieselbe Weise wird geschlossen, dass die Gl. $G' = 0$, welches aus G durch II erhalten worden ist, auf die Gl. $G = 0$ zurückführt, wenn auf sie (I) angewandt wird.

Es ist also geboten, bei den Reihen

$$G_1, G_2 \dots G_n \quad ; \quad G', G'' \dots G^{(m)} \dots$$

stehen zu bleiben; wir wollen sie noch mit Darboux (a. a. O.) in eine einzige Reihe einordnen. Sind z_{n-1} bezw. $z^{(m-1)}$ die abhängigen Veränderlichen in G_{n-1} bezw. $G^{(m-1)}$, so wird der Uebergang zu G_n bezw $G^{(m)}$ durch die bezüglichen Transformationsgleichungen

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + a_{n-1} z_{n-1} = z_n \qquad \frac{\partial z^{(m-1)}}{\partial x} + b_{m-1} z^{(m-1)} = z^{(m)}$$

vollzogen. Die Anwendung der zweiten Transformation (II) auf G_n würde eine Gl. ergeben, die aus G_{n-1} durch die Substitution $z_n = P z_{n-1}$ hervorginge. Betrachtet man nun zwei Gl-en als äquivalent, wenn sie durch eine Transformation der Form $z = P\varsigma$ auseinander hervorgehen, so kann man sagen: während G_n aus G_{n-1} durch (I) abgeleitet wird, geht G_{n-1} aus G_n durch (II) hervor. Diese Bemerkung gestattet die Aufstellung der einzigen Reihe

$$\dots \dots G_{-2}, G_{-1}, G, G_1, G_2 \dots \dots$$

in welches jedes G_i $(i \gtreqless 0)$ aus dem vorher-

gehenden durch (I), aus dem Folgenden durch (II) erhalten wird.

Es ist

$$h_n = 2h_{n-1} - h_{n-2} - \frac{\partial^2 \log h_{n-1}}{\partial x \partial y} \qquad k_n = h_{n-1}$$

$$k^{(m)} = 2k^{(m-1)} - k^{(m-2)} - \frac{\partial^2 \log k^{(m-1)}}{\partial x \partial y} \qquad h^{(m)} = k^{(m-1)},$$

wo der obere Index auch durch einen unte[ren] negativen ersetzt werden kann. Ist $h_n = 0$, so wissen wir (S. 209), dass

$$z_n = \alpha\left(\varphi(x) + \int \beta\, \psi(y)\, dy\right)$$

gesetzt werden kann und dass sich hierau[s] durch n malige Differentiation z, insbeso[ndere] eine particuläre Lösung

$$u\,\varphi(x) + u_1\,\varphi'(x) + \cdots + u_n\,\varphi^{(n)}(x)$$

ergiebt. Ebenso ist für $k^{(m)} = 0$

$$z^{(m)} = \alpha'\left(\psi(y) + \int \beta'\, \varphi(x)\, dx\right),$$

und es existiert die particuläre Lösung

$$v\,\psi(y) + v'\,\psi'(y) + \cdots + v^{(m)}\,\psi^{(m)}(y).$$

Ist gleichzeitig $h_n = k_{-m} = 0$, so existiren beid[e] Integrale, und da die Diff. Gl. $G = 0$ inbezug auf z und die Ableitungen homogen und linear ist, so ist auch

$$z = u\,\varphi(x) + \cdots + u_n\,\varphi^{(n)}(x) + v\,\psi(y) + \cdots + v_{-m}\,\psi^{(m)}(y)$$

ein Integral, und zwar das allgemeine, worauf es aber hier nicht ankommt. Es soll nur gezeigt werden, dass die Zahl $m+n$ für sämtliche Gl'en der aufgestellten Reihe eine invariante Bedeutung hat. Es wird

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az = \varphi \frac{\partial u}{\partial y} + \cdots\cdots + \varphi^{(n)} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \psi \frac{\partial v}{\partial y} + \cdots\cdots + \psi^{(m)} \frac{\partial v_m}{\partial y}$$
$$+ v\psi'(y) + \cdots\cdots + v_m \psi^{(m+1)}(y) + a(\cdots + u_n \varphi^{(n)}(x) + \cdots),$$

und wir erhalten, da (S. 211) $\frac{\partial u_n}{\partial y} + a u_n = 0$ sein muss, für z_1 einen Ausdruck, welcher $\varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n-1)}, \psi, \psi' \ldots \psi^{(m+1)}$, also

$$(n-1) + (m+1) = n+m$$

Ableitungen enthält. In gleicher Weise bleiben bei den folgenden Transformationen $n+m$ Ableitungen erhalten.
Es sollen jetzt die Diff. Gl'en untersucht werden, für welche die Invarianten h, k einander gleich sind.
Solche Diff. Gl'en können mittelst folgender Bemerkung in eine einfache Form gesetzt werden. Die Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

geht durch die Transformation $z = P \cdot \varsigma$ in

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x \partial y} + a' \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + b' \frac{\partial \varsigma}{\partial y} + c' z = 0$$

über, wo (S. 196)

$$a' = a + \frac{\partial \log P}{\partial y} \qquad b' = b + \frac{\partial \log P}{\partial x}$$

ist. Man kann nun die Transformation so wählen, dass $a' = 0$ wird und b' für einen speziellen Wert $y = y_0$ verschwindet. Damit nämlich $a' = 0$ werde, ist

$$\frac{\partial \log P}{\partial y} = -a \qquad \log P = -\int a\,dy + \varphi(x)$$

zu setzen, oder, damit keine willkürliche Constante hinzuzufügen sei:

$$\log P = -\int_{y_0}^{y} a\,dy + \varphi(x)$$

folglich

$$b' = b - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a}{\partial x}\,dy + \varphi'(x).$$

Für $y = y_0$ soll $b' = 0$ werden, d. h. für alle Wer[te] von x soll

$$0 = b(x, y_0) + \varphi'(x).$$

werden; diese Gl. ist eine gewöhnliche Diff. Gl. für $\varphi(x)$, welche diese Function bis auf eine willkürliche Constante bestim[mt]. Der Multiplicator P ist daher bis auf einen

constanten Factor bestimmt, der jedoch, in ς aufgenommen, wegen der Homogeneität der vorgelegten Diff. Gl. fortgelassen werden kann. Es ergiebt sich alsdann

$$a' = 0 \qquad b' = b - b(x, y_0) - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a}{\partial x} dy$$

während für c' aus der Gl. $h' = \frac{\partial a'}{\partial x} + a'b' - c'$ und $h' = h$ der Wert

$$c' = -h$$

folgt. Da noch $k' = k = \frac{\partial b'}{\partial y} + a'b' - c'$ also $\frac{\partial b'}{\partial y} = k - h$ ist, so kann b' auch in der Form

$$b' = \int_{y_0}^{y} (k - h)\, dy$$

geschrieben werden, und die transformierte Diff. Gl. lautet

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varsigma}{\partial y} \int_{y_0}^{y} (k - h)\, dy - h\varsigma = 0. \tag{19}$$

Für gleiche Invarianten h und k haben wir einfach

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x \partial y} = h\varsigma; \tag{20}$$

auf diese Form lässt sich (12) auch nur im Falle gleicher Invarianten bringen, wie aus (19) hervorgeht.

Man gelangt zu einer besonderen Gl. dieser Art, wenn man fordert, dass für die erste Transformierte G, die beiden Invarianten mit den entsprechenden der Ausgangsgl. G übereinstimmen sollen, dass also

$$h_1 = h \qquad k_1 = k$$

ist. Nun war immer $k_1 = h$, also muss $h = k$ sein, G muss gleiche Invarianten haben. – Ferner ist

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}$$

folglich genügt h der Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = 0,$$

aus welcher sich

$$h = X \cdot Y$$

ergiebt, wenn X, Y Functionen von x bzw. y allein sind. Wir erhalten demnach die transformierte Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = X\,Y \cdot s,$$

welche durch die Substitution

$$x' = \varphi(x)\ , \quad y' = \psi(y)\ , \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x'}\,\varphi'(x), \; \cdots\cdots$$

zunächst in

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x' \partial y'}\,\varphi'(x)\,\psi'(y) = X\,Y \cdot s,$$

sodann, wenn $\varphi'(x) = X$, $\psi'(y) = Y$, also

$$x' = \int X\,dx \qquad y' = \int Y\,dy$$

gesetzt wird, in

20a $$\frac{\partial^2 s}{\partial x' \partial y'} = s$$

übergeführt wird.

Die Diff. Gl-en (20)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda z,$$

wo $\lambda = \lambda(x,y)$ eine gegebene Function von x und y bezeichnet, sind zuerst von Moutard (Journal de l'Ecole Polytechnique, cah. 45) studiert. Moutard beweist folgenden Satz: wenn das allgemeine Integral der Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda z$$

bekannt ist, so kann man eine andere Diff. Gl. derselben Form aus ihr herleiten, deren allgemeines Integral ebenfalls bekannt ist. Dieser Satz soll zunächst bewiesen werden.

Es sei ω eine particuläre Lösung der Diff. Gl.

21. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda z$$

also

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \lambda \omega.$$

Die hieraus folgende Gl.

$$z\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \omega\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

können wir als Integrabilitätsbedingung schreiben, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

und es lässt sich daher eine Function ς durch die Gl'en

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial x}=z\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial z}{\partial x}\quad,\qquad \frac{\partial \varsigma}{\partial y}=-z\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial z}{\partial y}$$

definieren. Nun ist

$$\frac{\partial \frac{z}{w}}{\partial x}=\frac{w\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial w}{\partial x}}{w^2}\;,\qquad \frac{\partial \frac{z}{w}}{\partial y}=\frac{w\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial w}{\partial y}}{w^2},$$

folglich

a. $$\frac{\partial \varsigma}{\partial x}=-w^2\frac{\partial \frac{z}{w}}{\partial x}\quad,\qquad \frac{\partial \varsigma}{\partial y}=w^2\frac{\partial \frac{z}{w}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{w^2}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{w^2}\frac{\partial \varsigma}{\partial y}\right),\quad \frac{2}{w^2}\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x\partial y}-\frac{2}{w^3}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varsigma}{\partial y}-\frac{2}{w^3}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}=0$$

oder, wenn durch $\frac{2}{w^2}$ dividiert und

b. $$\varsigma=w z_1$$

gesetzt wird:

$$w\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial x}+z_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{1}{w}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(w\frac{\partial z_1}{\partial y}+z_1\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial w}{\partial y}\left(w\frac{\partial z_1}{\partial x}+\ldots\right.\right.$$

22. $$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}=z_1\left(\frac{1}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=z_1 w\frac{\partial^2 \frac{1}{w}}{\partial x\partial y}=\lambda_1 z_1$$

Die Variabeln z, z_1 hängen nach (a) (b) dur

die Gl^en

c. $$-\frac{1}{w^2}\frac{\partial(wz_1)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{z}{w}\right)}{\partial x}\,,\quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial(wz_1)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{z}{w}\right)}{\partial y}$$

zusammen. Wenn also eine partikuläre Lösung $z=w$ von (21) bekannt ist, so kann diese Diff. Gl. durch die Transformation (c) auf eine Gl. derselben Form gebracht werden, welche durch (22.) bestimmt ist. Wie aus (c) hervorgeht, ist z_1 bekannt, wenn z und w gegeben sind, und umgekehrt ist $\frac{z}{w}$, also auch z durch eine Quadratur zu ermitteln, falls z_1 und w gegeben sind. Indem man dieses Verfahren fortsetzend, eine particuläre Lösung $z_1=w_1$ der Diff. Gl. (22) als bekannt annimmt, erhält man eine wie (22) gebildete Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y}=\lambda_2 z_2$$

Jedoch darf zur Ausführung dieser Transformation nicht die Grösse $z_1=\frac{1}{w}$ benutzt werden, welche offenbar ein Integral von (22) ist; denn diese Lösung würde wieder zu (21) zurückführen. Angenommen nun, man kann von (21)

das allgemeine Integral[x], welches also zwei willkürliche Functionen enthält und aus welchem ω durch Specialisierung dieser letzteren erhalten werden kann. Da aber diese Specialisierung ganz willkürlich bleibt, wenn man irgend eine particuläre Lösung ω erhalten will, so enthält auch ω und folglich auch z, zwei willkürliche Functionen. Gehen wir nun zu den Gl'en (c) über, in welchen z und ω als bekannt gelten, und stellen z_1 durch Quadratur her, so kommen in diese Lösung z_1 von (22) die beiden willkürlichen Functionen von z_1 vor sowie diejenigen beiden willkürlichen Functionen, welche in ω auftraten. So erhalten wir aus dem allgemeinen Integrale z von (21) durch (c) das allgemeine Integral z_1 von (22), doch ist letzteres insofern allgemeiner, als in den Coefficienten seiner Gl. schon zwei willkürliche Functionen auftreten.
Ein einfaches Beispiel soll dies deutlich machen. Das allgemeine Integral der Dif

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

[x] Diese Annahme dürfen wir für specielle Werte von λ machen, obgleich wir den allgemeinen Existenzbeweis nicht erbracht haben.

kann auf die Form

$$z = X - Y$$

gebracht werden, wenn X eine willkürliche Function von x, Y eine solche von y bezeichnet. Die Specialisierung ergiebt ein particulares Integral

$$\omega = X_1 - Y_1,$$

wobei auch $X_1\ Y_1$ noch als willkürliche Functionen betrachtet werden können. Hier ist nun

$$\frac{\partial(\omega z_1)}{\partial x} = (X - Y)X_1' - (X_1 - Y_1)X', \quad \frac{\partial(\omega z_1)}{\partial y} = (X - Y)Y_1' - (X_1 - Y_1)Y'.$$

folglich

$$\omega z_1 = \int X X_1'\,dx - Y X_1 - \int X_1 X'\,dx + Y_1 X + \bar{\Psi}(y),$$

wobei $\psi(y)$ aus der zweiten Gl. durch:

$$-X_1 Y' + X Y_1' + \bar{\Psi}'(y) = X Y_1' - Y Y_1' - X_1 Y' + Y_1 Y'$$

bestimmt wird. Es ergiebt sich

$$\omega z_1 = \int X X_1'\,dx - \int X_1 X'\,dx - \int Y Y_1'\,dy + \int Y_1 Y'\,dy - Y X_1 + X Y_1$$

oder, bei Anwendung partieller Integration:

$$\omega z_1 = 2\int X X_1'\,dx - 2\int Y Y_1'\,dy - (X + Y)(X_1 - Y_1).$$

Bezeichnen wir jetzt noch

$$\int X X_1'\,dx = \varphi(x), \quad \int Y Y_1'\,dy = \psi(y)$$

also

$$X = \frac{\varphi'(x)}{X_1'}, \quad Y = \frac{\psi'(y)}{Y_1'}$$

und setzen x für $\varphi'(x)$, y für $\psi'(y)$, machen al[so]
die Substitution

$$x \,\|\, \frac{x}{x_1'} \qquad y \,\|\, \frac{y}{y_1'}$$

so erhalten wir

$$z_1 = 2\frac{x-y}{x_1-y_1} - \frac{x}{x_1'} - \frac{y}{y_1'}$$

Dieser Wert z_1 ist wegen

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\omega}}{\partial x \partial y} = -\frac{2x_1'y_1'}{(x_1-y_1)^3}$$

das allgemeine Integral von

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = -\frac{2x_1'y_1'}{(x_1-y_1)^2} z_1 \,.$$

Wir führen mit Darboux die Abkürzung

23. $$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(z)$$

ein, wodurch die Diff. Gl. (21) in

$$f(z) = \lambda$$

übergeht. Es sei wie vorher ω eine Lösung al[s]

$$f(\omega) = \lambda\,,$$

sodass für (22) die Gl.

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \lambda_1$$

geschrieben werden kann. Nachdem man als[o]
ein Integral ω der Diff. Gl. $f(z) = \lambda$ gefunden h[at,]
definiere man λ_1 durch die Gl. $\lambda_1 = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$, un[d]

bestimme sodann ein Integral ω_1 der Diff. Gl.

$$f(z) = \lambda_1,$$

sodass $f(\omega_1) = \lambda_1$ wird; darauf ist $\lambda_2 = f\left(\frac{1}{\omega_1}\right)$ zu setzen und die Diff. Gl. $f(z) = \lambda_2$ zu integrieren. Allgemein ist $\lambda_{n-1} = f(\omega_{n-1})$, $\lambda_n = f\left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\right)$ und

$$\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1} = f\left(\frac{1}{\omega_{\alpha-1}}\right) - f(\omega_{\alpha-1}) = \frac{2}{\omega_{\alpha-1}^2}\frac{\partial \omega_{\alpha-1}}{\partial x}\frac{\partial \omega_{\alpha-1}}{\partial y} - \frac{2}{\omega}\frac{\partial^2 \omega_{\alpha-1}}{\partial x \partial y}$$

$$= -2\,\frac{\partial^2 \log \omega_{\alpha-1}}{\partial x \partial y}.$$

Durch Addition der sämtlichen derartigen Gleichungen bis zum Index n erhalten wir sofort die independente Darstellung:

$$\lambda_n - \lambda = -2\,\frac{\partial^2 \log(\omega\,\omega_1 \cdots \omega_{n-1})}{\partial x \partial y}.$$

Wenn in dem allgemeinen Integrale $z = X - Y$ der zuletzt als Beispiel behandelten Diff. Gl. den Functionen X, Y wirklich specielle Formen gegeben werden, so gelangt man durch die Moutard'sche Transformation zu neuen, speciellen Gl'en. Darboux giebt a. a. O. das Beispiel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{n(n-1)}{(x+y)^2} - \frac{m(m-1)}{(x-y)^2}\right) z,$$

eine Diff. Gl., in welcher n, m beliebige Constan[ten]
bezeichnen sollen, und die durch die partic[uläre]
Lösung

$$\omega = (x+y)^n (x-y)^m$$

befriedigt wird, wie man sich leicht überzeug[t].
Wenn man diese Lösung dazu verwendet, au[s]
der vorgelegten Diff. Gl. eine neue derselben
Form herzuleiten $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = \lambda_1 z_1$, so ergiebt sich
für λ_1 ein λ ähnlicher Ausdruck. Die näh[ere]
Untersuchung lehrt, dass die transformiert[e]
Gl. sich von der gegebenen einfach dadurch
unterscheidet, dass $n+1$, $m+1$ an die Stelle
von n, m getreten sind. Wenn also für
specielle Werte von n, m die gegebene Diff.[Gl.]
integrabel ist, so kann man alle Diff. Gl-en
derselben Form integrieren, welche success[ive]
durch Vermehrung dieser Constanten um
Einheiten gebildet sind. Da wir aber für
$m = n = 1$ auf die elementare Gl. $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 0$ zurüc[k]
kommen, so lässt sich sofort eine unendlic[he]
Reihe von Gl-en angeben, deren allgemein[es]
Integral durch Quadraturen ermittelt wer[den]
kann.

Dieses Resultat kann insofern verallgemeinert werden, als man m, n nur so zu wählen braucht, dass man auf die Diff. Gl. (S. 204)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m}{(x-y)^2} z$$

zurückkommt, welche für $m = n(n+1)$, wo n eine ganze Zahl, integrabel ist. Die Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} z$$

können wir uns aus der gegebenen dadurch entstanden denken, dass $n=0$ oder $=1$ gesetzt und m durch $m+1$ ersetzt wird, und umgekehrt kommen wir aus dieser letzten Gl. leicht zu einem speciellen Falle der gegebenen zurück. Vermehrt man m, n um eine Einheit, so erkennt man, dass die vorgelegte Gl. und daher auch alle aus ihr folgenden durch Quadraturen integrierbar ist, falls m und n positive ganze Zahlen sind. Dasselbe Resultat ergiebt sich für negative ganze Zahlen durch den Umstand, dass die Diff. Gl. ungeändert bleibt, wenn m, n durch $1-m$, $1-n$ ersetzt werden.

Die wichtigen, von Darboux sogenannten harmonischen Diff. Gl'en, welche in dem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(f(x+y) - g(x-y) \right) z \tag{24.}$$

enthalten sind, haben stets ein Integral der Form

$$z = \varphi(x+y)\, \psi(x-y)$$

bei passender Bestimmung der Functionen φ und ψ. Die Einsetzung dieses Wertes in (24) ergiebt nämlich, wenn noch $x+y=\xi$, $x-y=\eta$ gesetzt wird:

$$-\varphi(\xi)\,\psi''(\eta) + \psi(\eta)\,\varphi''(\xi) = \left(f(\xi) - g(\eta) \right) \varphi(\xi)\,\psi(\eta)$$

oder nach Division mit $\varphi(\xi)\psi(\eta)$:

$$\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi(\xi)} - f(\xi) = \frac{\psi''(\eta)}{\psi(\eta)} - g(\eta)$$

Da aber ξ, η als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind, so kann diese Gl. nur dann stattfinden, wenn ihre beiden Seiten gleich derselben Constanten A sind:

$$\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi(\xi)} = f(\xi) + A \qquad \frac{\psi''(\eta)}{\psi(\eta)} = g(\eta) + A.$$

Die aus diesen gewöhnlichen Diff. Gl'en zweiter Ordnung bestimmten Functionen

φ, ψ geben durch die Gl.

$$\omega = \varphi \cdot \psi$$

ein particuläres Integral von (24).
Die aus einer harmonischen Gl. durch die Moutard'sche Transformation hergeleitete ist wieder eine harmonische. Denn da $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\psi}$ und $f(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, $\lambda_1 = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$, so folgt

$$\lambda_1 = \varphi \left(\frac{1}{\varphi}\right)'' - \psi \left(\frac{1}{\psi}\right)'' = f_1(x+y) - g_1(x-y),$$

wie behauptet wurde.
Die Frage, wenn eine Laplace'sche Gleichung mit gleichen Invarianten, welche also auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda z$$

gebracht werden kann, auf eine harmonische reducierbar ist, hängt mit dem noch nicht in befriedigender Weise gelösten flächentheoretischen Probleme zusammen, zu ermitteln, wann das Quadrat des Linienelementes einer Fläche sich in die Liouville'sche Form

$$ds^2 = (f(u) - g(v))(du^2 + dv^2)$$

setzen lässt. In diesem Falle lassen sich

die geodätischen Linien der gegebenen Fläc[he]
durch Quadraturen bestimmen, ein Satz diese[r]
Grundlage der Zusammenhang zwischen d[er]
Theorie dieser Linien und gewissen Problem[en]
der analytischen Mechanik bildet, und der
zunächst bewiesen werden soll.

Es soll ein Punkt auf der Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

unter dem Einflusse von Kräften stehen,
für welche eine Kräftefunction U existier[t].
Die halbe lebendige Kraft T, welche für
einen Punkt den Ausdruck $T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$
hat, ist durch diejenigen Grössen darzustel[len,]
welche geeignet sind, die Bewegung des
Punktes vollständig zu beschreiben,
d.h. durch zwei unabhängige Veränderlich[e]
u, v. Wird noch zur Vereinfachung $m=1$

$$\frac{du}{dt} = u' \qquad \frac{dv}{dt} = v'$$

gesetzt, so wird

$$T = \frac{1}{2}\left(E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2\right)$$

und die Bewegung des Punktes geschieht
gemäss den Gl'en

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial u} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v} = 0,$$

welche zu integrieren sind. Es ist

$$\frac{\partial T}{\partial u'} = \mathcal{E} u' + \mathcal{F} v' \quad , \qquad \frac{\partial T}{\partial v'} = \mathcal{F} u' + \mathcal{G} v'$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} u'^2 + 2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} u'v' + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u} v'^2\right), \; \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} u'^2 + 2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} u'v' + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v} v'^2\right)$$

Wird noch von vornherein ein isometrisches Coordinatensystem, also

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} \quad , \; \mathcal{F} = 0$$

angenommen, so gehen die Bewegungsgl.en über in:

$$A. \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}\frac{du}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) - \frac{\partial U}{\partial u} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}\frac{dv}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) - \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

da

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{E}(u'^2 + v'^2) \; , \quad ds^2 = \mathcal{E}(du^2 + dv^2)$$

wird. Nach dem Satze von der lebendigen Kraft ist nun $T = U + h$, wo h eine Constante, also

$$a. \qquad \mathcal{E}(u'^2 + v'^2) = 2(U + h)$$

eine Beziehung, welche eine der beiden Diff. Gl.en (A) ersetzen kann. Um eine zweite Integralgl. zu erhalten, setzen wir also $u'^2 + v'^2 = \frac{2}{\mathcal{E}}(U + h)$ etwa in die erste jener Gl.en ein, sodass wir

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}\frac{du}{dt}\right) = \frac{1}{\mathcal{E}}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}(U + h) + \frac{\partial U}{\partial u}$$

oder nach Multiplication mit $2\mathcal{E}\frac{du}{dt}$, die Gl

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}(U+h)\frac{du}{dt} + 2\mathcal{E}\frac{\partial U}{\partial u}\frac{du}{dt} = 2\frac{du}{dt}\frac{\partial\mathcal{E}(U}{\partial u}$$

erhalten. Angenommen nun, es wäre $\frac{\partial\mathcal{E}(U+}{\partial u}$ eine Function von u allein

$$\text{B.}\qquad \frac{\partial\mathcal{E}(U+h)}{\partial u} = f'(u)$$

so würde sofort

$$\text{b.}\qquad \left(\mathcal{E}\frac{du}{dt}\right)^2 = 2f(u) - A$$

folgen, wenn die Integrationsconstante mi $-A$ bezeichnet wird. Es ergiebt sich jetzt leicht die Lösung des Problemes, u und v als Functionen der Zeit darzustellen. Denn da die in (B) gemachte Annahme auch durch die Gl.

$$\mathfrak{B}\qquad \mathcal{E}(U+h) = f(u) - g(v)$$

ausgedruckt werden kann, wo g eine willkürliche Function des Argumentes v so folgt aus (a):

$$\mathcal{E}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mathcal{E}}(f(u) - g(v)) - \mathcal{E}\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

also

$$\text{b}'.\qquad \mathcal{E}^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 2(f(u) - g(v)) - \mathcal{E}^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = A -$$

und durch Division von (b) und (b'):

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{2f(u) - A}{A - 2g(v)}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2f(u)-A}} = \int \frac{dv}{\sqrt{A-2g(v)}}$$

die Gleichung der Bahncurve. Aus ihr kann z. B. u als Function von v bestimmt und in den Coefficienten E der Gl.

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{A-2g(v)}{E^2}$$

eingesetzt werden, sodass sich v und deshalb auch u als Function von t durch eine Quadratur ergiebt.
Ist insbesondere U = const., so bewegt sich der Punct bekanntlich in einer geodetischen Linie der Fläche, da er nicht mehr unter der Einwirkung ausserer Kräfte steht.
Wir erhalten also den obigen Satz: wenn für eine auf ein isometrisches Coordinatensystem bezogene Fläche die Fundamentalgrösse E auf die Form

$$E = f(u) - g(v)$$

gebracht werden kann, so sind die geodätischen Linien durch Quadraturen darstellbar. Die Fläche wird eine Liouvillesche Fläche genannt. (Für allgemeines U

sich Liouville's Abhandlung in seinem Journ
Wir haben nun den Zusammenhang zu untersuchen in welchem das Problem, eine Laplace'sche Gl. mit gleichen Invarianten in eine harmonische Gl. überzuführen, mit der Frage zusammenhängt, wann es möglich sei, ds^2 in die Form $\mathcal{E}(du^2+dv^2)$ zu setzen, wobei $\mathcal{E}$ die Bedingung ($\mathcal{L}^x$) erfüllt. Wir können dabei die Laplace'sche Diff.-Gl. in der einfachen Gestalt (21) annehmen, wobei $\lambda(x,y)$ den Ausdruck der gleichen Invarianten bezeichnet. Eine solche Diff. Gl. ändert ihre Form nur dann nicht, wenn auf sie die Transformation

$$x' = \varphi(x) \qquad y' = \psi(y)$$

angewendet wird, indem sie alsdann in die gleichgebildete Diff. Gl. übergeht. Aus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} \varphi'(x) \psi'(y)$$

ergiebt sich also folgende Problemstellung: Wenn die Diff. Gl. $s = \lambda z$ in die harmonische

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = \left(f(x'+y') - g(x'-y')\right) z$$

überzuführen, sind die vier Functionen φ, ψ, f, g so zu bestimmen, dass für gegebenes $\lambda(x,y)$ die Gl.

$$\lambda(x,y) = \varphi'(x)\,\psi'(y)\big(f(x'+y') - g(x'-y')\big) \tag{25.}$$

besteht, wobei die Transformation selbst durch die Formeln

$$x' = \varphi(x) \quad , \quad y' = \psi(y) \tag{25ᵃ}$$

geliefert wird. – In dieser Form lässt sich die Aufgabe mit dem erörterten flächentheoretischen Probleme in Beziehung setzen. Es stellt nämlich die linke Seite der aus (25) resultierenden Gl.

$$\lambda(x\,y)\,dx\,dy = \big(f(x'+y') - g(x'-y')\big)\,dx'\,dy'$$

für

$$x = u + vi \qquad y = u - vi$$

das Quadrat des Linienelementes einer Fläche dar,

$$\lambda\,dx\,dy = \mathcal{E}(du^2 + dv^2);$$

da dasselbe auch für die rechte Seite gilt, wenn

$$x' = u' + v'i \qquad y' = u' - v'i$$

gesetzt wird, so haben wir dasselbe Linienelement auf zwei verschiedene isometrische

Systeme bezogen, für deren zweites insbesondere $E'' = f_1(u') = g_1(v')$ ist. Unser Problem ist also identisch mit der Aufgabe, das Linienelement einer auf ein isometrisches Coordinaten-System bezogenen Fläche in die Liouville'sche Form zu setzen.

Wir wollen endlich die zur Lösung dieser Aufgabe notwendige Bedingung (25) noch umgestalten. Wird

$$\frac{1}{\varphi'(x)} = X_1 \qquad \frac{1}{\psi'(y)} = Y_1$$

gesetzt, so folgt

26. $$\lambda \cdot X_1 Y_1 = f(x'+y') - g(x'-y')$$

Da nun $$\frac{\partial^2(\lambda X_1 Y_1)}{\partial x'^2} = f''(x'+y') - g''(x'-y') = \frac{\partial^2(\lambda X_1 Y_1)}{\partial y'^2}$$

ist, so genügt die Grösse $\lambda X_1 Y_1$ der Diff. Gl.

26ª $$\frac{\partial^2(\lambda X_1 Y_1)}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2(\lambda X_1 Y_1)}{\partial y'^2}$$

und umgekehrt wird das allgemeine Integral dieser Diff. Gl. durch (26) dargestellt. Es ist nun in (26ª) noch x' durch x, y' durch y zu ersetzen, was mit Hülfe der Transformationsformeln (25ª)

$$x' = \int \frac{dx}{X_1}, \qquad y' = \int \frac{dy}{Y_1}$$

geschieht. Wir setzen noch

$$X_1 = \sqrt{X}, \qquad Y_1 = \sqrt{Y}$$

und bilden (26a):

$$\sqrt{X}\,\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{X}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\sqrt{X}\sqrt{Y}\right) = \sqrt{Y}\,\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{Y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\sqrt{X}\sqrt{Y}\right),$$

eine Gleichung, welche entwickelt die Form

$$27. \qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda$$

annimmt. Auf diese Weise ist das Problem auf das folgende zurückgeführt: Zu untersuchen, ob für ein gegebenes $\lambda(x,y)$ eine Function X von x und eine Function Y von y existieren, sodass die Gl. (27) identisch erfüllt ist.

Die lineare Form dieser Gl. führt uns zu mehreren Folgerungen: Wenn die Gl. von zwei verschiedenen Systemen (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) befriedigt wird, so wird sie auch von dem Systeme $(aX_1 + bX_2, aY_1 + bY_2)$ befriedigt. Wenn also eine Diff. Gl. auf zwei verschiedene Arten auf die harmonische Form gebracht werden kann, so ist

es auf unendlich viele Arten möglich,
oder: Wenn das Linienelement einer Fläch[e]
auf zwei verschiedene Arten auf die Liou-
ville'sche Form gebracht werden kann,
so ist es auf unendlich viele Arten möglich.

Capitel 3

Ehe wir zu den Diff. Gl-en höheren Grades übergehen, wollen wir noch die linearen Gl-en mit constanten Coefficienten betrachten. Die vorgelegte Diff. Gl. sei

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Fz + G = 0 \tag{28}$$

wo $A, B, \cdots G$ constante Grössen sind.
Sie kann durch die Euler-sche Transformation (S. 182 ff.) in eine andere übergeführt werden, welche von den partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung nur s bezw. r enthält, je nachdem $B^2 - 4AC \gtrless 0$ bezw $= 0$ ist.
Ferner kann das letzte Glied G wegen der Homogeneität der ersten Glieder dadurch weggeschafft werden, dass für

$$F \gtrless 0 \qquad z = \varsigma - \frac{G}{F}$$

$$F = 0 \qquad z - z_0 = \varsigma$$

gesetzt wird, wenn z_0, ebenso wie im ersten Falle $\frac{G}{F}$, eine particuläre Lösung der Diff. Gl. (28) bezeichnet. Wir können also von vornherein (28) als homogen in z und den Ableitungen voraussetzen und haben alsdann ein particuläres Integral in der

Exponentialfunction

$$z = e^{ux+vy} = \bar{\mathcal{E}}$$

wie sofort ersichtlich; die Werte von u und v bestimmen sich aus der Diff. Gl.
Statt $z = \bar{\mathcal{E}}$ kann auch allgemeiner

$$z = e^{ux+vy+\rho} = \mathcal{E} \tag{28^x}$$

angesetzt werden; doch wird ρ durch die Diff. Gl. offenbar nicht bestimmt.
Für die Diff. Gl. der schwingenden Saiten (S. 185) z. B.,

$$t - m^2 r = 0,$$

ergiebt die Anwendung von (28^x) die Gl.

$$v^2 - m^2 u^2 = 0$$

aus dem sich allerdings nur $v = \pm m u$ bestimmt. Werden u successive die Werte einer Reihe willkürlicher Constanten

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots$$

beigelegt, so ergiebt sich eine doppelte Reihe particulärer Integrale

$$A_\nu e^{\alpha_\nu(x+my)}, \quad A'_\nu e^{\alpha_\nu(x-my)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots$$

es sind daher auch unter Voraussetzung ihrer Convergenz die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{\alpha_\nu(x+my)}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} A'_\nu e^{\alpha_\nu(x-my)}$$

Lösungen der Diff. Gl., und ebenso ihre Summe, welche die Form

$$z = \varphi(x + my) + \psi(x - my)$$

hat wegen der Willkürlichkeit der Grössen A_ν, A'_ν, α_ν. Wir haben damit zwar das allgemeine Integral der Diff. Gl. der schwingenden Saiten wieder erhalten; doch tritt auf diesem Wege nicht ferner, inwiefern diese Lösung als das allgemeine Integral der Gl. bezeichnet werden kann.

Für $B^2 - 4AC \gtrless 0$ kann (28) in die Diff. Gl.

29. $$s + ap + bq + cz = 0$$

übergeführt werden, wo a, b, c constant sind. Sie hat die Form einer Laplace'schen Gl. mit den gleichen Invarianten

$$h = k = ab - c$$

und kann daher durch die Substitution $z = R(x, y) \cdot \varsigma$ in die Form $\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x \partial y} = (ab - c)\varsigma$ gesetzt werden. Dies geschieht, wie man sich leicht überzeugt, vermittelst der Function $R = e^{ux + vy}$, wenn $u = -a$, $v = -b$ genommen wird. Wird endlich noch

$$(a - bc)\, x = x'$$

gesetzt und die Bezeichnung geändert, so

ergiebt sich als Resultat der Transformation

29ª. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$$

die einfachste Moutard'sche Gleichung.
Wenn $B^2 - AC = 0$ ist, so führt die Euler'sche Transformation die Diff. Gl. (28) in

30. $$r + ap + bq + cz = 0$$

über. Diese Diff. Gl. kann nun wieder durch die Substitution

$$z = \mathcal{E} \cdot \varsigma$$

wo $\mathcal{E} = e^{ux+vy}$, in eine einfachere umgewandelt werden. Durch sie geht (30) nach Streichung des Factors $\mathcal{E}$ zunächst in die Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + (2u + a)\frac{\partial \varsigma}{\partial x} + b\frac{\partial \varsigma}{\partial y} + (u^2 + au + bv + c)\varsigma = 0$$

über, darauf, wenn

$$u = -\frac{a}{2}, \quad v = \frac{1}{b}\left(\frac{a^2}{4} - c\right), \quad z = e^{-\frac{a}{2}x + \frac{1}{b}\left(\frac{a^2}{4} - c\right)y} \cdot \varsigma$$

gewählt wird, in

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + b\frac{\partial \varsigma}{\partial y} = 0,$$

und endlich, wenn noch $y = -by'$ gesetzt und für y', ς wieder y, z gesetzt wird, in

30ª. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Der Fall $b = 0$, welcher die vorstehenden Transformationen ausschliesst, lässt sich nach der Theorie der gewöhnlichen Diff. Gl'en

erledigen.
Die beiden Typen, auf welche hiermit die Diff. Gl-en zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten zurückgeführt sind

$$s = z\ ,\quad r = q,$$

lassen sich durch bestimmte Integrale lösen, was zu zeigen das Ziel dieser letzten Betrachtungen sein sollte. Um diese Behauptung für die Diff. Gl. $r = q$ z. B. zu beweisen, bilden wir zunächst ein particuläres Integral dieser Gl. durch den Ansatz

$$z = e^{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

dessen Substitution in $r = q$ die Bedingung $\alpha^2 = \beta$ liefert, sodass

$$z = e^{\alpha x + \alpha^2 y + \gamma}$$

eine particuläre Lösung darstellt.
Es werde $\gamma = -\alpha u$ gesetzt und für α der Wert $\pm \alpha i$ angenommen, wonach sich die particulären Integrale

$$e^{\alpha i (x-u) - \alpha^2 y}\ ,\quad e^{-\alpha i (x-u) - \alpha^2 y}$$

ergeben; ihre wegen der Homogenität der

Diff. Gl. gestattete Vereinigung liefert das Integral

$$z = A e^{-\alpha^2 y} \cos \alpha (x-u),$$

ein Ausdruck, in welchem den Grössen A, α, u beliebige, von x und y unabhängige Werte beigelegt werden können.
Wir können

$$A = \varphi(u)$$

setzen und lassen sodann die Grössen α, u eine stetige Reihe von Werten, etwa die Werte des Intervalles von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Alsdann muss der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, e^{-\alpha^2 y} \cos \alpha (x-u)\, d\alpha\, du,$$

falls er einen Sinn hat, ein Integral der Diff. Gl. sein. Unter Voraussetzung der Convergenz des Integralausdruckes nun vollziehen wir zunächst die Integration inbezug auf α, d. h. wir bestimmen den Wert vo

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\alpha^2} \cos b\alpha\, d\alpha,$$

nachdem wir zur Abkürzung $y = a$, $x-u = b$ gesetzt haben.

Unter Benutzung der bekannten Methode, S als Function eines der Parameter a, b zu betrachten und durch Differentiation nach einem dieser Parameter eine Diff. Gl. für S zu ermitteln, bilden wir

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \int_{-\infty}^{+\infty} -\alpha\, e^{-a\alpha^2} \sin b\alpha \,.\, d\alpha$$

(das Integral gestattet nämlich, die Differentiation unter dem Integralzeichen vorzunehmen),

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin b\alpha \,.\, d(e^{-a\alpha^2})$$

$$= \frac{1}{2a}\Big[e^{-a\alpha^2}\sin b\alpha\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\alpha^2}\cos b\alpha \,.\, d\alpha$$

$$= \frac{b}{2a}\, S,$$

$$S = C\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

wo C inbezug auf b eine Constante ist. Zu ihrer Bestimmung setzen wir $b=0$ und erhalten

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Somit ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\alpha^2}\cos b\alpha\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-\frac{(x-u)^2}{4y}} du\,.$$

werde endlich noch

$$\frac{x-u}{2\sqrt{y}} = v,$$

also $u = x + 2v\sqrt{y}$, $du = 2\sqrt{y}\,dv$ gesetzt, so kommt

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2v\sqrt{y})\, e^{-v^2}\, dv \tag{31.}$$

als Darstellung von z in Form eines bestimmten Integrales, in welchem x und y als Parameter auftreten.

Im allgemeinen haben derartige Integrationen durch bestimmte Integrale ein nur theoretisches Interesse, weil die Erfüllung der Nebenbedingungen, denen die Lösung der Diff. Gl. genügen soll, nur schwer zu leisten ist. Aus diesem Grunde soll auch auf die Diff. Gl. $s = z$ nicht näher eingegangen werden. Ausführlichere Darstellungen dieser Methode finden sich in den Lehrbüchern der Analysis von Cournot, Duhamel, Lacroix, bei letzterem auch die ältere Litteratur über diesen Gegenstand. Das Verfahren selbst rührt im wesentlichen von Fourier her. Die Diff. Gl. $r = q$ spielt in der Theorie der Wärmebewegung eine Rolle.

von diesem Gesichtspunkte aus findet sie sich mit Berücksichtigung der Nebenbedingungen, welche das physikalische Problem berührt, eingehend behandelt bei Riemann: Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen; herausgegeben von Hattendorf.

Capitel 4

Es soll nun eine Diff. Gl. untersucht werden, welche durch die Lagrange'sche Transformation (vgl. S. 33) auf eine lineare zurückgeführt werden kann, nämlich die Diff. Gl. der Minimalflächen.

Wir wollen uns eine Minimalfläche durch die Eigenschaft definiert denken, dass in jedem ihrer Punkte die Summe der Hauptkrümmungen verschwindet. Alsdann lautet bekanntlich ihre Diff. Gl.

32. $$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0\ ;$$

diese Diff. Gl. zweiter Ordnung deren Coefficienten Functionen zweiten Grades von p und q sind, soll nun durch die Transforma[tion]

$$px + qy - z = w$$

wie angegeben umgewandelt werden. Wenn i[n] der Transformationsgl. p und q als die unabhängige Variabeln angesehen werde[n], so folgt

$$x = \frac{\partial w}{\partial p}\ ,\quad y = \frac{\partial w}{\partial q}.$$

Nun können die Grössen r, s, t durch di[e] Relationen

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad , \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

definiert werden, aus denen sich

$$dx = \frac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2} \qquad dy = \frac{r\,dq - s\,dp}{rt - s^2}$$

ergiebt. Andererseits können wir für p und q als unabhängige Variable setzen:

$$dx = \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}dp + \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}dq \ , \ dy = \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}dp + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}dq$$

und so folgt aus diesen beiden letzten Gleichungssystemen durch Gleichsetzung der Coefficienten von dp und dq:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} = \frac{-s}{rt - s^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}$$

Hieraus ergiebt sich

$$r = \frac{1}{rt - s^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} \quad , \quad s = -\frac{1}{rt - s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} \quad , \quad t = \frac{1}{rt - s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}$$

wobei $rt - s^2$ für

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}\right)^2$$

geschrieben ist. Die Einsetzung dieser Werte in die Diff. Gl. der Minimalflächen ergiebt hiernach die lineare Diff. Gl.

32ª. $$(1 + p^2)\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + (1 + q^2)\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0 .$$

Bevor wir diese Diff. Gl. nach der Euler-
schen Integrationsmethode behandeln, wollen
wir sie noch in eine geeignetere Form setzen.
Unser Ziel ist, die Grössen x, y, z so als
Functionen zweier unabhängigen Variablen
darzustellen, dass sie die Diff. Gl. (32)
befriedigen. Wäre diese Aufgabe für w
inbezug auf (32^a) gelöst, so würde sich sofort

$$x = \frac{\partial w}{\partial p} \qquad y = \frac{\partial w}{\partial q} \qquad z = p\frac{\partial w}{\partial p} + q\frac{\partial w}{\partial q} - w$$

ergeben. Es ist nun

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}$$

Folglich erhalten wir aus (32^a):

$$(1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p} + 2pq\frac{\partial x}{\partial q} + (1+q^2)\frac{\partial y}{\partial q} = 0$$

$$(1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p} + 2pq\frac{\partial y}{\partial p} + (1+q^2)\frac{\partial y}{\partial q} = 0$$

Aus diesen Gl^en folgt durch nochmalige
Differentiation nach p bezw. q und unter
Beachtung der Relation $\frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}$ eine
Diff. Gl. für x und y:

$$(1+p^2)\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} + (1+q^2)\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + 2p\frac{\partial x}{\partial p} + 2q\frac{\partial x}{\partial q} = 0 \qquad (33)$$

auf welche sich, wie wir sofort sehen werden, die Euler-sche Methode sehr leicht anwenden lässt.

Wenn allgemein

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+B\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}+C\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+D\frac{\partial x}{\partial p}+E\frac{\partial x}{\partial q}=0$$

die vorgelegte Diff. Gl. ist, so sind nach Euler zwei neue Veränderliche α, β einzuführen, welche (S. 182 ff.) der Diff. Gl.

$$A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right)^2+B\frac{\partial\alpha}{\partial p}\frac{\partial\alpha}{\partial q}+C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)^2=0$$

genügen, und es geht dadurch die Diff. Gl-en

$$B'\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+D'\frac{\partial x}{\partial\alpha}+E'\frac{\partial x}{\partial\beta}=0$$

über, wenn $B^2-4AC \gtrless 0$ ist, wie es für (33) der Fall ist. Es handelt sich nun vornehmlich um die Berechnung der Coefficienten D', E' der transformierten Diff. Gl.

$$D'=A\frac{\partial^2\alpha}{\partial p^2}+B\frac{\partial^2\alpha}{\partial p\,\partial q}+C\frac{\partial^2\alpha}{\partial q^2}+D\frac{\partial\alpha}{\partial p}+E\frac{\partial\alpha}{\partial q}$$

$$E'=A\frac{\partial^2\beta}{\partial p^2}+B\frac{\partial^2\beta}{\partial p\,\partial q}+C\frac{\partial^2\beta}{\partial q^2}+D\frac{\partial\beta}{\partial p}+E\frac{\partial\beta}{\partial q}.$$

Sind λ, μ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

so ist zu setzen:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial p} = \lambda \frac{\partial\alpha}{\partial q}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial p} = \mu \frac{\partial\beta}{\partial q}$$

folglich:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial p^2} = \lambda \frac{\partial^2\alpha}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\alpha}{\partial q}$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial p\,\partial q} = \lambda \frac{\partial^2\alpha}{\partial q^2} + \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\alpha}{\partial q}$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial p^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2\alpha}{\partial q^2} + \lambda \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\alpha}{\partial q} + \frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\alpha}{\partial q}$$

$$D' = \frac{\partial^2\alpha}{\partial q^2}(A\lambda^2 + B\lambda + C) + A\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\alpha}{\partial q} + A\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\alpha}{\partial q} + B\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\alpha}{\partial q} + D\frac{\partial\alpha}{\partial p} + E\frac{\partial\alpha}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial\alpha}{\partial q}\left(A\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q} + A\frac{\partial\lambda}{\partial p} + B\frac{\partial\lambda}{\partial q} + D\lambda + E\right)$$

und ein entsprechender Wert ergiebt sich für E'. Für die Diff. Gl. (33) ist

$$D' = \frac{\partial\alpha}{\partial q}\left[(1+p^2)\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q} + (1+p^2)\frac{\partial\lambda}{\partial p} + 2pq\frac{\partial\lambda}{\partial q} + 2p\lambda + 2q\right]$$

und die Gl. für λ lautet

$$(1+p^2)\lambda^2 + 2pq\,\lambda + (1+q^2) = 0,$$

aus welcher sich durch Differentiation ergiebt:

$$(1+p^2)\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q} + p\lambda^2 + pq\frac{\partial\lambda}{\partial p} + q\lambda = 0$$

$$(1+p^2)\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q} + pq\frac{\partial\lambda}{\partial q} + p\lambda + q = 0$$

Folglich:

$$[(1+p^2)\lambda+2pq]\frac{\partial\lambda}{\partial q}=-p\lambda-q+pq\frac{\partial\lambda}{\partial q}$$

$$\frac{D'}{\frac{\partial\alpha}{\partial q}}=-p\lambda-q+pq\frac{\partial\lambda}{\partial q}-\frac{p\lambda^2+q\lambda+pq\frac{\partial\lambda}{\partial p}}{\lambda}+2p\lambda+2q$$

$$\frac{\lambda D'}{\frac{\partial\alpha}{\partial q}}=pq\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}-\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right).$$

Nun ist aber

$$((1+p^2)\lambda+pq)\frac{\partial\lambda}{\partial p}=-\lambda(p\lambda+q)$$

$$((1+p^2)\lambda+pq)\frac{\partial\lambda}{\partial q}=-\lambda(p\lambda+q)$$

Folglich

$$\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}-\frac{\partial\lambda}{\partial p}=0\quad,\quad D'=0.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$E'=0,$$

sodass die transformierte Diff. Gl. unter der Voraussetzung, dass $B'\gtrless 0$ ist, lautet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0. \tag{33a}$$

Die in dem allgemeinen Integrale dieser Diff. Gl.

$$x=\varphi_1(\alpha)+\psi_1(\beta)\qquad y=\varphi_2(\alpha)+\psi_2(\beta)$$

auftretenden willkürlichen Functionen sind, was wohl zu beachten ist, insofern von einander abhängig, als die Beziehungen $x=\frac{\partial w}{\partial p}$, $y=\frac{\partial w}{\partial q}$ bestehen. Aus einem Grunde, der durch die folgende Rechnung ersichtlich

werden wird, wollen wir die in dem Ausdrucke von x enthaltenen, jedenfalls willkürlichen Functionen in der Form

$$x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta)$$

annehmen, woraus

$$w = \int \varphi'(\alpha)\, dp + \int \psi'(\beta)\, dp + \chi(q).$$

folgt, $\chi(q)$ eine willkürliche Function. Um jetzt α und β als Functionen von p und q zu bestimmen, nehmen wir die Diff. Gl. für α und β

$$(1+p^2)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right)^2 + 2pq\frac{\partial\alpha}{\partial p}\frac{\partial\alpha}{\partial q} + (1+q^2)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)^2 = 0,$$

zu welcher die gewöhnliche Diff. Gl.

$$(1+p^2)\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq + (1+q^2)\,dp^2 = 0$$

gehört. Letztere Gleichung, welche für $\frac{dp}{dq} = p'$ in die Form

$$(1+p^2) - 2q\,pp' + (1+q^2)\,p'^2 = 0$$

gesetzt werden kann, liefert

$$p = qp' + \sqrt{q^2p'^2 - (1+q^2)\,p'^2 - 1}$$
$$= qp' + i\sqrt{1+p'^2},$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt bleibt. Auf diese Weise ergiebt sich, dass unsere Diff. Gl., da si

die Clairaut'sche Form hat, durch den Ansatz

$$p' = C$$

befriedigt wird, d. h.: wenn in die aufgelöste quadratische Gl. eine constante Grösse für p' eingeführt wird, so werden die Integrale der in dieser Gl. vereinigten Diff. Gl. erster Ordnung erhalten. Wenn aber

$$f_1(p,q) = C_1 \qquad f_2(p,q) = C_2$$

die nach den Constanten aufgelösten Integralgl'en dieser gewöhnlichen Diff. Gl'en sind, so braucht nur α und β gleich einer willkürlichen Function von f_1 bezw. f_2 gesetzt zu werden; wir können jetzt also sagen: Die gesuchten Ausdrücke für α und β werden erhalten, indem man $p' = \alpha$ in die aufgelöste Gl. einsetzt und im zweiten Falle durch β vertreten lässt. Es werden also α und β durch die quadratische Gl.

$$(1 + p^2) - 2pq\alpha + (1+q^2)\alpha^2 = 0$$

bestimmt. Wir wollen nun lieber α und β

statt p und q bei der Darstellung von w als unabhängige Veränderlichen beibehalten. Hierzu haben wir aus

$$p = \alpha q + i\sqrt{1+\alpha^2} \qquad p = \beta q + i\sqrt{1+\beta^2}$$

durch Differentiation zu bilden:

$$dp = q\,d\alpha + i\,d\sqrt{1+\alpha^2}, \quad dp = q\,d\beta + i\,d\sqrt{1+\beta^2},$$

woraus sich ergiebt:

$$w = q(\varphi(\alpha)+\psi(\beta)) + i\int\varphi'(\alpha)\,d\sqrt{1+\alpha^2} + i\int\psi'(\beta)\,d\sqrt{1+\beta^2} + \chi(q)$$

$$y = \frac{\partial w}{\partial q} = \varphi(\alpha)+\psi(\beta) + q\left(\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial q} + \psi'(\beta)\frac{\partial\beta}{\partial q}\right) + i\varphi'(\alpha)\frac{d\sqrt{1+\alpha^2}}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial q}$$
$$+ i\psi'(\beta)\frac{d\sqrt{1+\beta^2}}{d\beta}\frac{\partial\beta}{\partial q} + \chi'(q).$$

Nun ist aber ferner

$$0 = \alpha + q\frac{\partial\alpha}{\partial q} + i\frac{d\sqrt{1+\alpha^2}}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial q},$$

$$0 = \beta + q\frac{\partial\beta}{\partial q} + i\frac{d\sqrt{1+\beta^2}}{d\beta}\frac{\partial\beta}{\partial q},$$

folglich:

$$y = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta) + \chi'(q).$$

Die Coordinate y muss, wie wir wissen, die Form

$$y = \varphi_2(\alpha) + \psi_2(\beta)$$

annehmen, die Grösse $(\varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)) + (\psi(\beta)-\beta\psi'(\beta))$ hat diese Gestalt, es fragt sich also, wenn $\chi'(q)$ in diese Form gesetzt werden kann.

Aus der Form von q

$$q = i\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1+\beta^2}}{\beta-\alpha},$$

geht hervor, dass $\chi(q)$ notwendig eine Constante sein muss, und diese kann alsdann in eine der beiden willkürlichen Functionen hineingenommen werden. Wir haben noch

$$z = px+qy-w = p(\varphi'(\alpha)+\psi'(\beta))+q(\varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)+\psi(\beta)-\beta\psi'(\beta))$$
$$-q(\varphi(\alpha)+\psi(\beta))-i\int\varphi'(\alpha)\,d\sqrt{1+\alpha^2}-i\int\psi'(\beta)\,d\sqrt{1+\beta^2}.$$

Nun ist

$$\int\varphi'(\alpha)\,d\sqrt{1+\alpha^2} = \varphi'(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2}-\int\varphi''(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

die Einsetzung dieser Werte ergiebt, dass infolge der Gl-en

$$p-q\alpha-i\sqrt{1+\alpha^2}=0\,,\quad p-q\beta-i\sqrt{1+\beta^2}=0$$

die Glieder mit $\varphi'(\alpha)$ und $\psi'(\beta)$ in dem Ausdrucke von z wegfallen. Die Grösse $\chi(q)$ ist, weil $\chi'(q)=0$ angenommen werden kann, als Constante unbezeichnet geblieben. So erhalten wir endgültig die Gl-en

$$34.\quad\begin{cases} x = \varphi'(\alpha)+\psi'(\beta) \\ y = \varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)+\psi(\beta)-\beta\psi'(\beta) \\ z = i\int\varphi''(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2}\,d\alpha+i\int\psi''(\beta)\sqrt{1+\beta^2}\,d\beta \end{cases}$$

in welchen nunmehr von der Bedeutung

der Grössen p und q vollständig abgesehen werden kann. Es ist schon oben (S. 7) darauf hingewiesen worden, dass

$$p = -\frac{x}{z} \qquad q = -\frac{y}{z}$$

ist; bei unserer Rechnung sind also specielle Tangentialcoordinaten der Minimalfläche bevorzugt worden.
Die Rechnung hätte übrigens auf Kosten der Kürze symmetrischer gestaltet werden können, doch sollten hier die von Monge (Applications de l'Analyse à la Géométrie) angegebenen Formeln hergeleitet werden.
Mit der Lagrange'schen Transformation

$$px + qy - z = w$$

hängen zwei andere zusammen, welche gewöhnlich nach Ampère bezeichnet werden, aber ebenfalls schon von Lagrange aufgestellt worden sind. Die erste beruht darauf,

$$px - z = w \tag{35a}$$

zu setzen und die beiden Grössen p und y als unabhängige Veränderlichen zu betrachten. Die zweite Transformation geht

aus dieser durch Vertauschung hervor; man setzt

(35^b) $$qy - z = w$$

und betrachtet x und q als unabhängige Variabeln. Es soll für die erste Transformation das System von Gl-en entwickelt werden, welches entsteht, wenn die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung unter der ersten Voraussetzung in die zweite Voraussetzung umzusetzen sind. Wenn demnach zunächst p, y die unabhängigen Veränderlichen sind, so folgt aus (35^a):

$$\frac{\partial w}{\partial p} = p\frac{\partial x}{\partial p} + x - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p},$$

folglich, da $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ erklärt ist:

a. $$x = \frac{\partial w}{\partial p}.$$

Ferner wird auf gleiche Weise:

b. $$\frac{\partial w}{\partial y} = p\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = -q.$$

Zur Bildung der Differentialquotienten zweiter Ordnung setzen wir die Gl-en

$$dp = r\,dx + s\,dy \qquad dq = s\,dx + t\,dy$$

an, aus denen folgt:

$$dx = \frac{1}{r}(dp - s\,dy)$$

$$dq = t\,dy + \frac{s}{r}dp - \frac{s^2}{r}dy = \frac{rt-s^2}{r}dy + \frac{s}{r}dp.$$

Andererseits ergiebt sich aus (a) und (b)

$$dx = \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}dp + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial p}dy$$

$$dq = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial p}dp - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy$$

folglich durch Vergleichung dieser Darstellungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial y} = -\frac{s}{r}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{rt-s^2}{r},$$

und, wenn noch

$$D = \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial y}\right)^2 = -\frac{rt-s^2}{r^2} - \frac{s^2}{r^2} = -\frac{t}{r}$$

gesetzt wird:

$$\text{c.} \qquad r = \frac{1}{\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}} \qquad s = -\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial y}}{\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}} \qquad t = \frac{-D}{\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}}$$

Die Transformationen sollen zur Lösung zweier flächentheoretischen Aufgaben benutzt werden. Es seien zunächst alle Flächen zu bestimmen, für die eine Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen liegt. Die Diff. Gl. der Krümmungslinien ist

$$((1+q^2)s - pqt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ((1+q^2)r - (1+p^2)t)\frac{dy}{dx} + (pqr - (1+p^2)s)$$

Die Schar der Ebenen soll durch die Gl.

$$y = \alpha$$

wiedergegeben werden können für α als einen veränderlichen Parameter. Die specielle Annahme besagt, dass unsere Diff. Gl. das Integral $y = \alpha$ haben soll, dass sie also durch $\frac{dy}{dx} = 0$ befriedigt wird. Wir können demnach, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, als partielle Diff. Gl. der gesuchten Flächenklasse die Diff. Gl.

$$pq\,r - (1+p^2)\,s = 0$$

betrachten. Indem wir nun p und y als unabhängige Veränderliche annehmen, erhalten wir nach (a), (b), (c):

$$-p\frac{\partial w}{\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial y} = 0,$$

oder, wenn $\frac{\partial w}{\partial y} = v$ gesetzt wird

$$-p\,v + (1+p^2)\frac{\partial v}{\partial p} = 0.$$

Aus dieser Diff. Gl. folgt durch Integration:

$$\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+p^2}$$

$$v = \frac{\partial w}{\partial y} = \sqrt{1+p^2}\cdot\varphi(y)$$

$$w = \sqrt{1+p^2}\cdot\Phi(y) + \Psi(p),$$

wo $\Phi(y)$, $\Psi(p)$ willkürliche Functionen bezeichnen.

H inzuzunehmen ist

$$x = \frac{\partial w}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\varphi(y) + \psi'(p)$$

und es ist sodann durch Elimination von p x, y zu bestimmen.

Nun lautet die Transformationsgl. (35^a):

$$V = z - px + \sqrt{1+p^2}\,\varphi(y) + \psi(y) = 0\;;$$

betrachtet man hierin allein p als veränderlich und differentiiert nach p, so ergiebt sich die vorletzte Gl. Es kommt also lediglich auf die Elimination von p aus $V=0$ und $\frac{\partial V}{\partial p}=0$ an, und so erscheint jede Fläche der gesuchten Klasse als Enveloppe einer Fläch $V=0$, deren Gl. von zwei willkürlichen Functionen φ, ψ abhängt.

Wenn wir an Stelle von y die Coordinate bevorzugt hätten, sodass $x=\beta$ die Gl. der Ebenschar geworden wäre, so würden wir aus (35^b) folgende Transformationsformeln zu benutzen haben:

$$\frac{\partial w}{\partial q} = y \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -p \qquad t = \frac{1}{\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}} \qquad s = -\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial q\,\partial x}}{\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}}$$

$$r = -\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial q\,\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}}, \qquad rt - s^2 = -\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}}.$$

Aus der Form von $rt-s^2$ ist ersichtlich, dass, wenn auch diese Grösse in der Diff. Gl. auftritt, die Diff. Gl. trotzdem unter gewissen Voraussetzungen – z. B. wenn der Nenner $\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}$ ausser Betracht bleibt – auf eine lineare zurückgeführt werden kann.

Es sollen zweitens die abwickelbaren Flächen, die Flächen vom Krümmungsmasse 0, bestimmt werden. Aus

$$K = \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}$$

folgt als Diff. Gl. dieser Flächen:

$$rt-s^2=0.$$

Hier gilt die soeben gemachte Bemerkung: die Diff. Gl. wird

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,$$

ihr allgemeines Integral:

$$w = x\,\varphi(q) + \psi(q)$$

folglich

$$y = x\,\varphi'(q) + \psi'(q).$$

Ähnlich wie bei der vorhergehenden Aufgabe ist wieder q aus

$$z-qy+x\,\varphi(q)+\psi(q)=0, \quad -y+x\,\varphi'(q)+\psi'(q)=0$$

oder, unter Anwendung derselben Bezeichnung, aus $V=0$ und $\frac{\partial V}{\partial q}=0$ herauszuschaffen.
Auch hier erscheint also jede Fläche als Enveloppe einer anderen Fläche, die ihrerseits von den willkürlichen Functionen φ, ψ abhängt. Diese Lösung giebt die geometrische Eigenschaft der abwickelbaren Flächen insofern wieder, als die Gl. $V=0$ stets eine Ebene darstellt. Die abwickelbaren Flächen erscheinen somit als Enveloppen einer Ebenenschar

Capitel 5.

Das Wesentliche des hier angewandten Integrationsverfahrens beruht darauf, die zur Integration vorgelegte Diff. Gl. zweiter Ordnung auf zwei successive zu integrierenden Diff. Gl-en erster Ordnung zurückzuführen. Als einfachstes Beispiel zur Erläuterung dieses jetzt weiter zu verfolgenden Verfahrens werde die Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = c$$

genommen, deren allgemeines Integral

$$z = cxy + \varphi(x) + \psi(y)$$

ist. Indem wir statt $s = c$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = c \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

schreiben, erhalten wir die Gl-en

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = cx + \psi'(y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p = cy + \varphi'(x)$$

welche zweckmässig als „Zwischenintegrale" der gegebenen Diff. Gl. bezeichnet werden können im Gegensatze zu dem „primitiven Integrale" z, welches die Ableitungen p, q nicht enthält. Wir können

jetzt entweder eines der beiden Zwischen-
integrale nochmals integrieren oder die
durch sie dargestellten Werte von p, q in

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

einsetzen, um sodann durch Integration
dieses Ansatzes zu z zu gelangen.
Auf diese letzte Weise erhalten wir

$$dz = c(y\,dx + x\,dy) + \varphi'(x)\,dx + \psi'(y)\,dy,$$

$$z = cxy + \varphi(x) + \psi(y),$$

wenn die bei der Integration auftretende
additive Constante in eine der beiden
willkürlichen Functionen aufgenommen
wird.
Unter Umständen kann man sich der
Zwischenintegrale auch dann bedienen
wenn nicht von vornherein willkürliche
Functionen in ihnen auftreten. So ist z.B.

$$q + mp = \alpha + \beta(x + my),$$

wo α und β willkürliche Constanten,
ein Zwischenintegral für die Diff. Gl.

$$t - m^2 r = 0;$$

denn die durch Differentiation aus dem
Ansatze folgenden Gl-en

$$s+mr=\beta\ ,\qquad t+ms=\beta m$$

führen zu dieser Diff. Gl. zurück. Da letztere übrigens die Constante m nur in der Form m^2 enthält, so muss auch

$$q-mp=\alpha'+\beta'(x-my)$$

ein Zwischenintegral sein. Wenn nun p und q berechnet und in $dz=pdx+qdy$ eingesetzt werden, so ergiebt sich durch Integration ein Integral, welches fünf willkürliche Constanten enthält; auf solche speciellen Integrale soll später noch zurückgekommen werden.

Es sei allgemein

$$V=0$$

für irgend eine Diff. Gl. zweiter Ordnung ein Zwischenintegral. Es möge angenommen werden, dass V ausser seinen Argumenten x, y, z, p, q noch zwei willkürliche Constanten α, β enthält, sodass

$$V=V(x,y,z,p,q,\alpha,\beta)$$

zu schreiben ist. Nach der Erklärung des Zwischenintegrales muss man durch Differentiation der Gl. $V=0$ nach x und y

und Elimination der partiellen Ableit-
ungen zur Ausgangsgl. zurückkehren.
Wir bilden also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial p} r + \frac{\partial V}{\partial q} s = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q + \frac{\partial V}{\partial p} s + \frac{\partial V}{\partial q} t = 0$$

und wissen, dass diese Gl-en zusammen
mit $V=0$, vermöge der gegebenen Diff. Gl
eine Identität liefern, die natürlich –
wie in dem letzten Beispiele – α und β
nicht mehr enthält. Machen wir nun
Gebrauch von der schon früher benutzten
Thatsache, dass das Ergebnis der Elimin.
nur von der Form abhängt, in welche
α, β in $V=0$ eintreten, beachten wir fern.
dass α, β ganz willkürlich sind, so könn.
wir diese Constanten als veränderlich
Grössen annehmen. Nun wird die
linke Seite der Gl. $dV=0$, welche mit
den beiden $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)=0$ äquivalent ist
bei Veränderung der Grössen α, β
um $\frac{\partial V}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial V}{\partial \beta} d\beta$ vermehrt. Es muss als
die Gl.

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial V}{\partial \beta} d\beta = 0$$

bestehen, und umgekehrt: wenn diese Gl. angesetzt wird, so bleibt, was auch α, β bezeichnen mögen, das System der drei Gl-en $V=0$, $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ gegen die vorherige Annahme ungeändert. Wir setzen jetzt wie früher

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

sodass noch folgende Bedingung zu erfüllen ist:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \varphi'(\alpha) = 0.$$

Hieraus geht hervor: Jedes, zwei willkürliche Constanten α, β enthaltende „vollständige Zwischenintegral" kann in der Art verallgemeinert werden, dass β gleich einer willkürlichen Function von α gesetzt wird, wobei aber die partielle Ableitung von V nach α gleich null zu setzen ist. Für das letzte Beispiel lautete der Ausdruck des Zwischenintegrales

$$q + mp - \alpha - (x+my)\varphi(\alpha) = 0;$$

aus der Ableitung nach α

$$1 + \varphi'(\alpha)(x+my) = 0$$

folgt

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{1}{x+my},$$

sodass $x+my$ eine willkürliche Function von α wird und $\alpha + (x+my)\varphi(\alpha)$ eine Funct[ion] von $x+my$ allein,

$$q + mp = \chi'(x+my).$$

Es lässt sich also in diesem Falle die ein[e] willkürliche Grösse α eliminieren, währ[end] die willkürliche Function φ durch ein[e] andere χ' ersetzt wird. Auf gleiche Wei[se] könnte durch Änderung des Vorzeichen[s] von m ein zweites Zwischenintegral erlangt werden, welches in Verbindun[g] mit jenem ersten zu dem primitive[n] Integrale führen würde. Wenn nur das erste Zwischenintegral $q+mp = \chi'(x+my)$ vorausgesetzt wird, so liegt eine partielle Diff. Gl. erster Ordnung vor, zu welcher das System gewöhnlicher Diff. Gl-en

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{m} = \frac{dz}{\chi'(x+my)}$$

gehört. Es ergiebt sich zunächst

$$x - my = C$$

$$dz = \chi'(x+my)\,dy = \chi'(C+2my)\,dy$$

$$z = C' + \frac{1}{2m}\chi(C+2my)$$

folglich, wenn C' noch in die willkürliche Function aufgenommen wird

$$z - \frac{1}{2m}\chi(x+my) = 0.$$

Es giebt daher die Gl.

$$z - \frac{1}{2m}\chi(x+my) = \varphi(x-my)$$

das allgemeine Integral.
Die Eigenschaft dieser Diff. Gl. der schwingenden Saiten, dass die angegebne Elimination möglich ist, kommt offenbar nur ganz besonderen Diff. Gl^en zu, und es ist leicht, Diff. Gl^en anzugeben, welchen diese Eigenschaft nicht zukommt.
Es ist überhaupt schon die Existenz eines Zwischenintegrales

$$v = \varphi(u),$$

wo u, v bestimmte Functionen von x, y, z, p, q, φ eine willkürliche Function, eine besondere Eigenschaft, wie an dem Beispiele der Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$$

einer reducicirten Form der Diff. Gl^en

zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten, gezeigt werden soll. Angenommen es existierte ein solches Zwischenintegral „erster Ordnung" und es habe, nach q aufgelöst, die Form

$$q = f(x, y, z, p)$$

so muss wegen

$$s = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r = z$$

eine Identität ergeben, d. h. die Glieder müssen sich gegenseitig aufheben. Dies ist für die Grösse r unmöglich, weil f sie nicht enthält, also muss $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ sein, f darf p nicht enthalten,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = z.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus dieser Gl. $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, und es bleibt daher $\frac{\partial f}{\partial x} = z$. Dies ist aber eine Gl., welche nicht identisch bestehen kann, weil f die Grösse z nicht enthält. Die Diff. Gl. $s = z$ hat also kein Zwischenintegral.

Die Gleichung des Zwischenintegrales kann in der symmetrischen Form

$$\psi(u, v) = 0$$

angenommen werden. Aus ihr folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p + \frac{\partial u}{\partial p}r + \frac{\partial u}{\partial q}s\right) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p + \frac{\partial v}{\partial p}r + \frac{\partial v}{\partial q}s\right) = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q + \frac{\partial u}{\partial p}s + \frac{\partial u}{\partial q}t\right) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q + \frac{\partial v}{\partial p}s + \frac{\partial v}{\partial q}t\right) = 0$$

und die Determinante dieser Gl~en ist offenbar linear inbezug auf r, s, t und die Verbindung $rt - s^2$, welche mit dem Factor $\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}$ multiplicirt auftritt. Wenn daher eine Diff. Gl. zweiter Ordnung ein Zwischenintegral haben soll, so muss sie die Form haben:

36. $$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

wo, H ···· N Functionen von x, y, z, p, q sind. Die Klasse dieser Gl~en, auf welche sogleich eingegangen werden wird, wird als die Monge-Ampère'sche Klasse bezeichnet, da einerseits mehrere von Monge in den Applications etc. behandelten Problemen

mit ihnen zusammenhängen, andererseit[s]
Ampère in zwei Abhandlungen (Journal
de l'École Polytechnique, cahh. 17, 18) sie
untersucht hat. Zu vergleichen ist
hierzu noch eine Abhandlung von
Imschenetsky, Archiv für Math. und Physik
Bd. 54 (1872).
Es ist zu beachten, dass nicht umgekeh[rt]
jede Diff. Gl. von der Form (36) ein
Zwischenintegral hat, wie das Beispiel
$s - z = 0$ zeigt.
Wir wollen jetzt die Integration der
Diff. Gl. (36), ohne Rücksicht darauf,
ob ein Zwischenintegral von vornhere[in]
als existierend angenommen wird
oder nicht, nach einer schon angewand[ten]
Methode anstellen. Es soll nämlich a[n]
Stelle von y eine neue unabhängige
Variable α eingeführt werden, über die im
Laufe der Untersuchung noch passend
verfügt werden soll. Es seien also x, α
die unabhängigen Variabeln; es bezeich[ne]
ferner $\frac{\partial z}{\partial x}$ die unter dieser Voraussetzung

nach x genommene Ableitung von z, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = q\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

37.
$$\left\{\begin{array}{ll} a. & \frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x} \\ b. & \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \phantom{r +{}} s\frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ c. & \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x} \\ d. & \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \phantom{s +{}} t\frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{array}\right.$$

Hieraus folgt

$$t = \frac{\partial q}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \lambda$$

$$s = \frac{\partial q}{\partial x} - \lambda\frac{\partial y}{\partial x} \quad , \qquad r = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$

Bei der Einführung dieser Werte in (36) verschwindet der Coefficient von $t^2 = \lambda^2$, und die transformierte Gl. ist:

8. $$H\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 2K\frac{\partial q}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \lambda\left[H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\frac{\partial y}{\partial x} + L + N\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = 0$$

oder, kürzer geschrieben

$$u_1 + \lambda u_2 = 0.$$

Wir verfügen jetzt über α in der Art, dass λ aus dieser Gl. verschwindet, d. h. wir setzen $u_2 = 0$ und behalten alsdann $u_1 = 0$ als Diff. Gl. übrig. Daher liegen die beiden Diff. Gl-en

39. $$H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\frac{\partial y}{\partial x} + L + N\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

40. $$H\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 2K\frac{\partial q}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 = 0$$

vor. Wenn man aus ihnen in Verbindu
mit (37) (a), (c) $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}$ eliminiert, so
kommt man, wie leicht zu zeigen ist,
zu (36) zurück; es sind also die Gl~en
(37) (a), (c), (39), (40) geeignet, die Diff. Gl.
(36) zu ersetzen. Die Integration von (36)
ist somit zurückgeführt auf die
Integration eines Systemes von Diff. Gl~
erster Ordnung, von welchen zwei,
(39) und (40), die Grössen r, s, t nicht
enthalten. Wenn nun (36) auf irgend
eine Weise gelöst, d.h. z als Function
von x, y bestimmt ist, wenn sodann α
eingeführt wird, so sind $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}$ als
Functionen von x, α bekannt, und es ergel
sich r, s, t aus (37). Jedenfalls brauchen
wir, solange es sich nicht um die
Bestimmung von r, s, t handelt, di
Gl~en (37) (a), (c) nicht zu berücksichtig
die Integration von (36) ist zurückgeführ

auf die der Gl-en (39),(40) mit den Unbekannten p, q, y, falls von der Bestimmung von r, s, t abgesehen wird. Da ferner α in (39) und (40) nicht explicit vorkommt, so können diese Diff. Gl-en als Gleichungen inbezug auf x allein angesehen werden, es muss daher in den zugehörigen Integralgl-en die Integrationsconstante durch eine willkürliche Function von α ersetzt werden, und es wird sich sodann α aus dieser Integralgl. bestimmen lassen. Um dies genauer zu verfolgen, wollen wir (39) in eine lineare Gl. transformieren. Die Gl. (39) kann geschrieben werden:

$$H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\frac{\partial y}{\partial x} + \mathcal{L} + N\left(r + s\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\left(s + t\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$$

oder

$$(H + Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{\partial y}{\partial x} + (\mathcal{L} + Nr) = 0.$$

Aus ihr folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(\mathcal{L} + Nr)}}{H + Nt}.$$

Der hier auftretende Radicand lautet:

$$K^2 - 2KNs + N^2s^2 - HL - HNr - LNt - N^2rt$$
$$= K^2 - N(Hr + 2Ks + Lt + N(rt - s^2)) - HL.$$

Nun folgt aber, wie bemerkt, aus (39), (40) und den hier ebenfalls benutzten Gl~en (37) (a), (c) die Diff. Gl. (36) wieder, und daher hat jener Radikand den Wert $K^2 + MN - HL$. Wenn also noch zur Abkürzung

41. $$K^2 - HL + MN = G$$

gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{G}}{H + Nt}$$

folglich

$$H\frac{\partial y}{\partial x} + N\left(s + t\frac{\partial y}{\partial x}\right) - K \mp \sqrt{G} = 0$$

42. $$H\frac{\partial y}{\partial x} + N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0$$

womit die lineare Form für (39) erreicht ist. Um auch der Gl. (40) diese Gestalt zu geben, setzen wir den aus (42) für $H\frac{\partial y}{\partial x}$ sich ergebenden Wert in sie ein und erhalten

$$H\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\left(N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G}\right) + 2K\frac{\partial y}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0$$

43. $$H\frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial y}{\partial x} + M = 0$$

Die Gl~en (42), (43) sind nur formale Umformungen der Gl~en (39), (40); sobald

in (42) das Vorzeichen von $\sqrt{G}$ festgesetzt ist, so ist damit das Gleiche für (43) geschehen. Nachdem das Zeichen fixiert ist, werden die beiden Gl~en, als gewöhnliche Diff. Gl~en für die Unabhängige x betrachtet, integriert und die Integrationsconstanten durch willkürliche Functionen von α ersetzt; man erhält dann, dem doppelten Vorzeichen von $\sqrt{G}$ entsprechend, für α zwei Werte α, β, für welche als Constanten die Gl~en (42), (43) gelten. Nachdem z als Function von x und y bestimmt ist, stellt $\alpha = const.$ eine Curve auf der Fläche $z = f(x, y)$ dar. Man bezeichnet die Curvenschar $\alpha = const.$ — und ebenso $\beta = const.$ — als eine Schar charakteristischer Curven der Integralfläche. Die Diff. Gl~en (42), (43) werden infolgedessen als die Differentialgleichungen der Characteristiken bezeichnet.
Sie können formell noch weiter umgeformt werden, indem man die Existenz von α, β auch äusserlich hervortreten lässt.
Wenn α constant genommen wird, sodass in

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + dx \quad , \quad dp = \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

die ersten Glieder wegfallen, so folgt aus (42) und (43):

$$44. \quad \begin{cases} H\,dy + N\,dq - (K \pm \sqrt{G})\,dx = 0 \\ H\,dp + (K \mp \sqrt{G})\,dq + M\,dx = 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

wenn noch die Definitionsgleichung für dz hinzugenommen wird. Als Integral dieser drei totalen Diff. Gl-en ist dann ein Ausdruck zu betrachten

$$V(x, y, z, p, q) = C$$

dessen vollständiges Differential vermöge der Diff. Gl-en identisch verschwindet. Letztere gestatten aber, drei der in

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq$$

auftretenden Differentiale, z. B. dz, dp, dq durch die anderen auszudrücken; es ist nämlich

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dq = \frac{(K \pm \sqrt{G})dx - H\,dy}{N}$$

$$dp = \frac{1}{H}\left(-M\,dx - \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\left((K \pm \sqrt{G})dx - H\,dy\right)\right)$$

$$= \frac{-MN - (K^2 - G)}{HN} dx + H \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} dy$$

$$dp = \frac{-L\,dx + (K \mp \sqrt{G})\,dy}{N}.$$

Die Einsetzung dieser Werte ergiebt dV als lineare Function von dx, dy und liefert daher, da dV identisch verschwinden muss, folgendes System homogener Diff. Gl^en für V:

$$45.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{L}{N}\dfrac{\partial V}{\partial p} + \dfrac{K \pm \sqrt{G}}{N}\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{K \mp \sqrt{G}}{N}\dfrac{\partial V}{\partial p} - \dfrac{H}{N}\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass umgekehrt ein Integral dieser Diff. Gl^en auch ein Integral von (44) ist. Entnimmt man aus (45) die Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ und setzt sie in den Ausdruck von dV ein, so zerfällt dieser in drei Teile, welche auf Grund von (44) einzeln verschwinden. Das System (45) kann also das System (44) vollständig ersetzen. Nachdem dies festgestellt ist, können wir von der Methode absehen, welche zu (44) geführt hat, dass nämlich ausser x die Function α eingeführt werde; wir können nämlich, ausgehend von den Diff. Gl^en der Characteristiken

$$46. \quad \begin{cases} N\,dp + L\,dx - (K \mp \sqrt{G})\,dy = 0 \\ N\,dp - (K \pm \sqrt{G})\,dx + H\,dy = 0 \end{cases}$$

zeigen, dass ein Integral V des Systemes (45) ein Zwischenintegral der Diff. Gl. (36) darstellt.

Es sei $V = C$ ein Integral von (45), wo x, y, z, p, q als die unabhängigen veränderlichen betrachtet werden. Durch Differentiation nach x und y folgen die Gl-en:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}p + \frac{\partial V}{\partial p}r + \frac{\partial V}{\partial q}s = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}q + \frac{\partial V}{\partial p}s + \frac{\partial V}{\partial q}t = 0$$

Werden in diesen Gl-en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ durch ihre aus (45) folgenden Werte ersetzt – was gestattet ist, da ja V ein Integral dieses System sein soll –, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} \frac{L}{N} + r & -\frac{K \pm \sqrt{G}}{N} + s \\ -\frac{K \mp \sqrt{G}}{N} + s & \frac{H}{N} + t \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gl., welche mit (36) übereinstimmt. Wir haben damit folgendes Resultat erlangt: Wenn eine Diff. Gl. (36) vorgelegt ist, so bilde man das simultane System

erster Ordnung (45). Gelingt es, ein Integral $V = C$ dieses Systemes zu bestimmen, so ist es zugleich ein Zwischenintegral der Diff. Gl. (36), sodass alsdann $V(x, y, z, p, q) = C$, als partielle Diff. Gl. erster Ordnung aufgefasst, nochmals zu integrieren ist.

Sind $V = C$, $U = C'$ zwei unabhängige Integrale von (45), unabhängig in dem Sinne, dass eine Gleichung $F(U, V) = 0$ nicht stattfindet, so ist auch

$$\psi(U, V) = C'',$$

wo ψ eine willkürliche Function bezeichnet, ein Integral dieses Systemes, d. h. ein Zwischenintegral der Diff. Gl. (36). Denn es ist

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial U}\,dU + \frac{\partial\psi}{\partial V}\,dV = 0,$$

weil nach der Voraussetzung dU und dV null sein sollen.

Es sei noch bemerkt, dass man C'' in ψ aufnehmen kann und sodann aus $\psi(U, V) = 0$ die Gl.

$$V = \varphi(U)$$

erhält, wo φ wieder eine willkürliche

Function bezeichnet. Falls also zwei Integrale des Systemes (45) bekannt sind, so kann ein Zwischenintegral von (36) ermittelt werden, welches eine willkürliche Function erhält.

Die Monge'sche Methode zur Herleitung der Charakteristiken besteht in Folgendem. Es werden in (36) x, y als unabhängige Veränderliche angenommen und die aus

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad , \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

sich ergebenden Werte

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx} \quad , \quad t = \frac{dq - s\,dx}{dy}$$

in die Diff. Gl. eingeführt, worauf nach Potenzen von s geordnet wird. Das Ergebnis der Substitution wird linear in Bezug auf s, und, indem die Coefficienten von s^1, s^0 einzeln $= 0$ gesetzt werden, ergiebt sich

$$H\,dp\,dy + L\,dq\,dx + M\,dx\,dy + N\,dp\,dq = 0$$

$$-H\,dy^2 + 2K\,dx\,dy - L\,dx^2 - N(dp\,dx + dq\,dy) = 0.$$

Hierin werden nun die Grössen r, s, t wieder eingeführt und sodann mit Hülfe der Diff. Gl. wieder eliminiert, was die Gröss

G wieder einführt, wenn man bestrebt ist, die Differentiale sämtlich auf die erste Dimension zu bringen.

Gegen diese Methode ist einzuwenden, dass die Bedeutung der Differentiale unklar bleibt, ganz abgesehen davon, dass die Zerlegung der vorgelegten Diff. Gl'en in zwei Diff. Gl'en rein schematisch erscheint. – Bezüglich der entwickelten Ampere'schen Methode sei noch bemerkt, dass der Übergang von (44) zu (45) Boole zu verdanken ist.

Man kann versuchen, die Methode von Ampere auf Diff. Gl'en von der Form

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

auszudehnen, deren linke Seite eine ganze Function wenigstens in Bezug auf r, s, t ist. Es ist dann neben x eine noch zu bestimmende Grösse α als unabhängige Veränderliche einzuführen und sodann F unter Benutzung der Transformationsformeln (37) nach Potenzen von $t = \frac{\partial q}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \lambda$ zu entwickeln, wodurch sich die Gl.

$$u_1 + u_2\lambda + u_3\lambda^2 + \cdots + u_{k+1}\lambda^k = 0$$

ergeben möge. Wenn jetzt die Werte von $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}$ aus (37) entnommen und in die Gl-en

$$u_1 = 0 \quad , u_2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad u_{k+1} = 0$$

eingesetzt werden, wenn sodann die Elimination des einzigen in diesen Gl-en noch vorkommenden Differentialquotienten zu der vorgelegten Diff. Gl. zurückführt, so kann die Integration dieser Diff. Gl. durch die jenes Systemes ersetzt werden.

Wir wollen endlich noch prüfen, welchen Einfluss die Lagrange-schen Transformationen auf die Diff. Gl-en der Monge-Ampère-schen Klasse ausüben. Durch die Transformation

$$px + qy - z = w,$$

für welche die Transformationsformeln S. 250-251 gelten, geht die Diff. Gl.

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

deren Coefficienten Functionen von x, y, z, p, q sind, über in die Diff. Gl.

a. $$H\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - 2K\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + L\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + M\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}\right)^2\right) + N = 0$$

deren Coefficienten als Functionen von

$$\frac{\partial w}{\partial p},\ \frac{\partial w}{\partial q},\ p\frac{\partial w}{\partial p}+q\frac{\partial w}{\partial q}-w,\ p,\ q$$

erscheinen. Wenn also statt p, q, w wieder x, y, z geschrieben, so hat die transformierte Gl. dieselbe Gestalt wie die Ausgangsgl., und sind einige Coefficienten miteinander vertauscht. Infolgedessen nehmen auch die Diff. Gl-en der Charakteristiken eine andere Form an.

Die andere Lagrange'sche Transformation,

$$px - z = w,$$

für welche die Transformationsformeln S. 261-262 zu benutzen sind, führt in ähnlicher Weise die vorgelegte Diff. Gl. in

$$\text{b.}\qquad H - 2K\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial y} - \mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial y}\right)^2\right) + M\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + N\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

über; die Coefficienten der transformierten Diff. Gl. werden gegebene Functionen von

$$\frac{\partial w}{\partial p},\ y,\ p\frac{\partial w}{\partial p}-w,\ p,\ -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Die Diff. Gl-en (a), (b) lauten nach Änderung der Bezeichnung:

$$\text{a}'.\qquad \mathfrak{L}r - 2Ks + Ht + N + M(rt - s^2) = 0,$$

$$\text{b}'.\qquad Mr - 2Ks + Nt + H - \mathfrak{L}(rt - s^2) = 0;$$

die Form der Coefficienten der vorgelegten Diff. Gl. kann es nützlich erscheinen lassen, zu diesen transformierten Diff. Gl^en überzugehen.

Es sollen jetzt einige Beispiele zu dieser Theorie behandelt werden. Vorgelegt sei zunächst die Diff. Gl.

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$

welche durch die erste Lagrange-sche Transformation in die gleichwertige

$$p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + 2pq \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + q^2 \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0$$

übergeht. Um bei jener stehen zu bleiben, so ist

$$H = q^2, \quad K = -pq, \quad L = p^2, \quad M = N = 0, \quad G = 0,$$

und es fällt daher das Doppelsystem der Charakteristiken in eines zusammen. Aus (44) erhalten wir

$$q\,dy + p\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad dz = 0$$
$$q\,dp - p\,dq = 0 \quad \text{"} \quad \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = 0$$

folglich

$$z = \alpha \quad q = \beta p,$$

und daher ist

$$\frac{q}{p} = \varphi(z),$$

weil φ eine willkürliche Function bezeichnet, das allgemeine Zwischenintegral der vorgelegten Diff. Gl.. Zur Herstellung des primitiven Integrales ist das System gewöhnlicher Diff. Gl-en

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{-\varphi(z)} = \frac{dz}{0}$$

anzusetzen, aus welchem sich

$$z = C \qquad x + y\,\varphi(C) = C'$$

ergiebt, dann ist nach der Theorie der Diff. Gl-en erster Ordnung

$$x + y\,\varphi(z) = \psi(z)$$

das primitive Integral mit zwei willkürlichen Functionen. Die Gl. $z = \alpha$ stellt eine Schar zur xy-Ebene paralleler Ebenen dar, die Gl. $x + y\,\varphi(\alpha) - \psi(\alpha) = 0$ eine Schar von Ebenen, welche zur xy-Ebene senkrecht sind, beide Gl-en zusammen also eine zur xy-Ebene parallele Gerade; letztere erzeugt die in Rede stehende Fläche, deren Gl. durch Elimination von α aus jenen beiden Gl-en erhalten wird. Die partielle Diff. Gl.

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

ist daher die Diff. Gl. derjenigen Flächen, welche durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die stets einer festen Ebene parallel bleibt. Es ist interessant, auch die transformierte Diff. Gl. zu betrachten, welche nach Vertauschung der Bezeichnung die Form

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0$$

erhält. Diese Diff. Gl. hat, wie S. 187-188 gezeigt worden ist, das allgemeine Integral

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

und hierin ist nach rückwärts z durch w, x durch $\frac{\partial w}{\partial p}$, y durch $\frac{\partial w}{\partial q}$ zu ersetzen. Wir erhalten

$$w = p\,\varphi\left(\frac{q}{p}\right) + \psi\left(\frac{q}{p}\right),$$

$$x = \varphi\left(\frac{q}{p}\right) - \varphi'\left(\frac{q}{p}\right)\frac{q}{p} - \psi'\left(\frac{q}{p}\right)\frac{q}{p^2},$$

$$y = \varphi'\left(\frac{q}{p}\right) + \frac{1}{p}\psi'\left(\frac{q}{p}\right)$$

$$z = w - px - qy = p\varphi - \psi - p\varphi + q\varphi' + \frac{q}{p}\psi' - q\varphi' - \frac{q}{p}\psi'$$

$$z = \psi\left(\frac{q}{p}\right)$$

$$\frac{q}{p} = \overline{\varphi}(z),$$

worauf wieder wie vorher zu verfahren ist. Ein zweites Beispiel ist die Diff. Gl.

$$rt - s^2 = 0,$$

für welche $H = K = L = M = G = 0$, $N = 1$ ist.
Unter Benutzung des Systemes (45), welches hier lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

ersehen wir, dass V eine beliebige Function von p, q sein kann, sodass $\psi(p, q) = 0$ oder

$$q = \varphi(p)$$

ein allgemeines Zwischenintegral der vorgelegten Diff. Gl. wird. Es ist jetzt nach der Theorie der partiellen Diff. Gl~en erster Ordnung weiter zu verfahren, wodurch sich, wie bekannt und oben auch schon erwähnt, die Integralfläche als Enveloppe einer Ebenenschar herausstellt.
Zur Integration der allgemeinen Gl.

$$rt - s^2 = -a^2$$

($H = K = L = 0$, $M = a^2$, $N = 1$, $G = a^2$) benutzen wir als Diff. Gl~en der Charakterisken die Gl~en (46):

$$dp \pm a\,dy = 0 \qquad dq \mp a\,dx = 0,$$

aus denen folgt:

$$p \pm ay = \alpha, \quad q \mp ax = \beta.$$

Hieraus ergiebt sich nach Trennung der Vorzeichen das allgemeine Zwischenintegral und primitive Integral. Bei dieser Diff. Gl. z. B. könnte mit Vorteil auch die S. 286 skizzierte Monge'sche Methode benutzt werden. Die Diff. Gl. lautet

$$\frac{dp - s\,dy}{dx} \cdot \frac{dq - s\,dx}{dy} - s^2 = -a^2;$$

die Nullsetzung der Coefficienten von s' und s^0 liefert die Gl'en

$$\frac{dp}{dx} \cdot \frac{dq}{dy} = -a^2 \qquad \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dx} = 0$$

aus welchen

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = a^2, \quad \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = a^2,$$

also wie oben

$$dp \pm a\,dy = 0 \quad , \quad dq \mp a\,dx = 0$$

folgt.

Für die Diff. Gl. der schwingenden Saiten

$$t - m^2 r = 0$$

ist $H = -m^2$, $L = 1$, $K = M = N = 0$, $G = m^2$.

Die Diff. Gl. der Charakteristiken lauten, wenn die erste Form (44) benutzt wird:

$$-m^2 dy \mp m\,dx = 0 \qquad -m^2 dp \mp m\,dq = 0,$$

ihre Integrale können geschrieben werden

$$x \pm my = \alpha, \quad q \pm mp = \beta,$$

und so ergiebt sich das allgemeine Zwischenintegral

$$q + mp = \varphi(x+my)$$

welches oben S. 271 durch die Methode der Variation der Constanten aus dem vollständigen Zwischenintegral

$$q + mp = \alpha + \beta(x+my)$$

hergeleitet worden ist. Es ist hier die geeignete Stelle, auf den Begriff des Zwischenintegrales näher einzugehen.

Es sei eine Diff. Gl. vorgelegt, welche Ableitungen bis zur m^{ten} Ordnung enthält:

$$F(x, y, z, z_{10}, z_{01}, z_{20}, z_{11}, z_{02} \cdots\cdots z_{m0} \cdots) = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$z_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$$

gesetzt wird. Angenommen nun, man kenne eine Gl. zwischen x, y, z, welche die Ableitungen von z bis zur q^{ten} Ordnung enthält ($q < m$)[x]:

$$V(x, y, z, z_{10} \cdots\cdots\cdots z_{q,0}\; z_{q-1,1} \cdots\cdots z_{0q}) = 0,$$

und welche so beschaffen ist, dass, wenn man

[x] Die Darboux'sche Methode berücksichtigt auch den Fall $q = m$.

sie $(m-g)$ mal nach x und y einzeln differentiiert und die Differentialquotienten soweit als möglich eliminiert, auf diesem Wege eine Gl. erhalten wird, welche mit der gegebenen $F=0$ identisch ist; eine solche Gleichung $V=0$ wird als Zwischenintegral g^{ter} Ordnung der Diff. Gl. $F=0$ bezeichnet. Durch die angegebenen Differentiationen werden im ganzen

$$1+2+\cdots\cdots+(m-g+1)=\tfrac{1}{2}(m-g+1)(m-g+2)$$

Gl.en erhalten; aus diesem Systeme kann man sich

$$\tfrac{1}{2}(m-g+1)(m-g+2)-1=\tfrac{1}{2}(m-g)(m-g+3)$$

Grössen, etwa ebensoviele in V vorkommende Constanten, eliminiert denken. Enthält das Zwischenintegral V diese Anzahl von Constanten, so wird es als ein vollständiges Zwischenintegral g^{ter} Ordnung bezeichnet. Insbesondere ergiebt sich für $g=0$: Ein primitives Integral ist dann als vollständig zu bezeichnen, wenn es $\frac{1}{2}m(m+3)$ willkürliche Constanten enthält. Für $m=2$ ergiebt sich: Ein vollständiges Zwischenintegral einer

Diff. Gl. zweiter Ordnung muss zwei willkürliche Constanten, ein vollständiges primitives Integral fünf willkürliche Constanten enthalten.

Von letzterem kann man wieder durch eine gewisse Methode der Variation der Constanten[x] zum allgemeinen Integrale übergehen.

Die Gleichung

$$V(x, y, z, a, b, c, g, h) = 0$$

stelle ein vollständiges primitives Integral einer Diff. Gl. zweiter Ordnung dar; dann muss die Elimination der fünf willkürlichen Constanten a, b, c, g, h aus den Gl~en

$$V = 0\ ,\ V_{10} = 0\ ,\ V_{01} = 0\ ,\ V_{20} = 0\ ,\ V_{11} = 0\ ,\ V_{02} = 0$$

die gegebene Diff. Gl. $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ ergeben. Diese sechs Gl~en sind wegen der Unabhängigkeit der Variabeln x, y vollständig gleichwertig mit den Gl~en

$$V = 0\ ;\ dV = 0\ ;\ dV_{10} = 0\ ;\ dV_{01} = 0$$

Wir untersuchen nun, wie immer, wenn es sich darum handelt, die Methode der

[x] Hierzu und zu dem folgenden Beispiele ist zu vergleichen: Lagrange, Memoires de l'Academie de Berlin, 1774.

Variation der Constanten anzustellen, was aus diesen Differentialen wird, wenn man auch a ...... h als veränderlich betrachtet:

$$dV = V_{10}dx + V_{01}dy + \frac{\partial V}{\partial a}da + \cdots\cdots + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$
$$dV_{10} = V_{20}dx + V_{11}dy + \frac{\partial V_{10}}{\partial a}da + \cdots\cdots + \frac{\partial V_{10}}{\partial h}dh$$
$$dV_{01} = V_{11}dx + V_{02}dy + \frac{\partial V_{01}}{\partial a}da + \cdots\cdots + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$

Das Ergebniss der Elimination, $F=0$, bleibt ungeändert, wenn man die zu den ursprünglichen Differentialen hinzutretenden Ausdrücke $=0$ setzt, da das Resultat nur von der Form abhängt, in welcher diese Grössen in die sechs zur Elimination dienenden Gl-en eintreten. Wir suchen also die Grössen a, b, ... h als Functionen von x, y folgenden drei Gl-en gemäss zu bestimmen:

a. $$\frac{\partial V}{\partial a}da + \frac{\partial V}{\partial b}db + \cdots\cdots + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 0$$

b. $$\frac{\partial V_{10}}{\partial a}da + \frac{\partial V_{10}}{\partial b}db + \cdots\cdots + \frac{\partial V_{10}}{\partial h}dh = 0$$

c. $$\frac{\partial V_{01}}{\partial a}da + \frac{\partial V_{01}}{\partial b}db + \cdots\cdots + \frac{\partial V_{01}}{\partial h}dh = 0$$

Durch diese Gl-en können drei der

ursprünglich als constant betrachteten Grössen bestimmt werden.

Es soll dies an dem Beispiele der Diff.Gl.

$$t - m^2 r = 0$$

durchgeführt werden. Diese Diff. Gl. wird durch folgende Function zweiten Grades von x, y befriedigt:

$$z = a + bx + cy + hx^2 + gxy + m^2 hy^2,$$

wie aus den Werten der Differentialquotienten,

$$p = b + 2hx + gy \qquad q = c + gx + 2m^2 hy$$

$$r = 2h \qquad t = 2m^2 h$$

hervorgeht; es sind dabei a, b .... h willkürliche Constanten, und daher ist

$$V \equiv z - (a + \cdots + m^2 hy^2) = 0$$

ein vollständiges Integral. Die Gl~en (a), (b), (c) sind:

a. $da + x\,db + y\,dc + x^2 dh + xy\,dg + m^2 y^2 dh = 0$

b. $db + 2x\,dh + y\,dg = 0$

c. $dc + x\,dg + 2m^2 y\,dh = 0.$

Die Combination von (b) und (c) ergiebt

$$d(c + mb) + (x + my)\,d(g + 2mh) = 0$$

$$d(c - mb) + (x - my)\,d(g - 2mh) = 0.$$

Da wir nun wissen, dass durch die drei Gl-en (a), (b), (c) nur gewisse Verbindungen von $a, b, \dots h$ als Functionen von gewissen anderen Verbindungen dieser Grössen sich bestimmen lassen, so versuchen wir worauf die Form der letzten Gl-en führt, zu setzen:

$$c + mb = \varphi(g + 2mh), \quad c - mb = \varphi(g - 2mh).$$

Die Differentiation dieser Gl-en und Einsetzung in (b), (c) führt zu

$$\varphi'(g + 2mh) + x + my = 0,$$
$$\varphi'(g - 2mh) + x - my = 0,$$

woraus folgt:

$$g + 2mh = \lambda(x + my) = \lambda(\alpha),$$
$$g - 2mh = \mu(x - my) = \lambda(\beta),$$

Diese Gl-en, in welchen zur Abkürzung $x + my = \alpha$, $x - my = \beta$ gesetzt ist und λ, μ willkürliche Functionen bezeichnen, bestimmen g und h als Functionen von α und β. Aus

$$d(c + mb) + \alpha\lambda'(\alpha)\, d\alpha = 0, \quad d(c - mb) + \beta\mu'(\beta)\, d\beta = 0$$

folgen sodann für b und c die Gl-en

$$c + mb = -\int \alpha\lambda'(\alpha)\, d\alpha, \quad c - mb = -\int \beta\mu'(\beta)\, d\beta,$$

endlich aus (a) für die Grösse a:

$$a = \frac{1}{4m}\left\{\int \alpha^2 \lambda'(\alpha)\, d\alpha - \int \beta^2 \mu'(\beta)\, d\beta\right\}.$$

Auf diese Weise wird z:

$$z = \frac{1}{4m}\left\{\int \alpha^2 \lambda'(\alpha) d\alpha - 2\alpha \int \alpha \lambda'(\alpha) d\alpha + \alpha^2 \lambda(\alpha) - \int \beta^2 \mu'(\beta) d\beta + 2\beta \int \beta \mu'(\beta) d\beta - \beta^2 \mu(\beta)\right\},$$

oder, wenn noch die Formeln

$$\int \alpha^2 \lambda'(\alpha) d\alpha = \alpha^2 \lambda(\alpha) - 2\int \alpha\, \lambda(\alpha) d\alpha$$

$$\int \alpha\, \lambda'(\alpha) d\alpha = \alpha\, \lambda(\alpha) - \int \lambda(\alpha) d\alpha$$

$$\int \alpha\, \lambda(\alpha)\, d\alpha = \int \alpha\, d \int \lambda(\alpha) d\alpha = \alpha \int \lambda(\alpha) d\alpha - \int d\alpha \int \lambda(\alpha) d\alpha$$

und die analogen für β benutzt werden:

$$z = \frac{1}{2m}\left\{\int d\alpha \int \lambda(\alpha) d\alpha - \int d\beta \int \mu(\beta)\, d\beta\right\}.$$

Wenn wir schliesslich

$$\lambda(\alpha) = 2m\, \varphi''(\alpha), \quad \mu(\beta) = 2m\, \psi''(\beta)$$

setzen, so erhalten wir

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \varphi(x+my) + \psi(x-my),$$

also genau das oben auf anderem Wege hergeleitete allgemeine Integral.
Aus diesem einfachen Beispiele ist ersichtlich, wie umständlich sich die Methode der Variation der Constanten

bei den Diff. Gl-en zweiter Ordnung gestaltet; Lagrange selbst hat a. a. O. das Verfahren als ein „mehr merkwürdiges als nützliches" bezeichnet. Von einem planmässigen Verfahren kann bei der ganzen Rechnung nicht die Rede sein; dass wir bei dem letzten Beispiele zu wirklichen Ausdrücken für $a, b \dots h$ gekommen sind, ist lediglich der speciellen Form der Diff. Gl. zu verdanken. Allerdings ist es neuerdings gelungen, diese Methode, die auch dann gilt, wenn die Methode der Charakteristiken versagt, systematischer zu gestalten (Vgl. Koenig, Math. Annalen, Bd. 24)

Der wesentliche Unterschied bei der Anwendung der Methode der Variation der Constanten zwischen den Diff. Gl-en erster Ordnung und denjenigen zweiter Ordnung beruht darauf, dass bei jenen die Ausführung dieser Operation vom vollständigen Integrale sofort zum allgemeinen führt. Wir wollen von dieser Methode für

einen speciellen Fall Gebrauch machen, der für die Theorie der Diff. Gl-en der Charakteristiken wichtig ist.
Es werde vorausgesetzt, dass für ein bestimmtes Vorzeichen von $\sqrt{G}$ ein System von zwei Integralen

$$V = \alpha \qquad V_1 = \beta$$

der Diff. Gl-en der Charakteristiken bekannt sei. Es wird gefragt, wann die aus diesen Gl-en berechneten Werte von p und q dazu benutzt werden können, die Gl.

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

zu integrieren, d. h. wann die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Um von vornherein so zu verfahren, wie es nachher für die Variation der Constanten gebraucht wird, so schreiben wir die gegebenen Gl-en in der Form:

47. $$V(x,y,z,p,q) = \alpha \quad , \quad V_1(x,y,z,p,q) = \varphi(\alpha)$$

Aus ihnen möge folgen

$$p = F(x,y,z) \quad , \quad q = G(x,y,z)$$

und die oben genannte Integrabilitätsbedingung lautet alsdann:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial x} + F\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Wir haben zu untersuchen, wann diese Gl. erfüllt ist.

Nun sollte nach der Erklärung von V und V_1 $dV = dV_1 = 0$ sein vermöge der Diff. Gl-en der Charakteristiken, d. h. wann aus

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial p}dp + \frac{\partial V}{\partial q}dq = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}dx + \frac{\partial V_1}{\partial y}dy + \frac{\partial V_1}{\partial z}dz + \frac{\partial V_1}{\partial p}dp + \frac{\partial V_1}{\partial q}dq = 0$$

dp und dq berechnet und in die Diff. Gl-en der Charakteristiken eingesetzt werden, so müssen sich zwei Identitäten ergeben. Diese Werte von dp und dq sind aber identisch mit

$$dp = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

$$dq = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz$$

oder mit den hieraus durch die dritte Gl. der Charakteristiken $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ sich ergebenden Werten

$$dp = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)dy$$

$$dq = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + p\frac{\partial G}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y} + q\frac{\partial G}{\partial z}\right)dy.$$

Aus den Diff. Gl-en der Charakteristiken folgt

$$dp = -\frac{L}{N}dx + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}dy,$$

$$dq = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}dx - \frac{H}{N}dy,$$

und so erhalten wir, als Ausdruck der Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{K \mp \sqrt{G}}{N} = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}$$

d.h.

47ᵃ $$G = 0$$

und diese Gl. ist offenbar auch hinreichend. Die beiden Integrale $V = \alpha$, $V_1 = \varphi(\alpha)$ können nur bei dieser Voraussetzung zur Integration der ursprünglichen Diff. Gl. benutzt werden. Denken wir uns nun die Constanten α, $\varphi(\alpha)$ in F und G aufgenommen und dann, wie es auf Grund der Gl. $G = 0$ möglich ist, die Diff. Gl.

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

integriert, so möge folgen:

$$z = \omega(x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \gamma),$$

ein specielles Integral der vorgelegten Diff. Gl. Die Methode der Variation

der Constanten liefert nun einen Ausdruck mit zwei willkürlichen Functionen.
Wir brauchen nur

$$\gamma = \psi(\alpha)$$

zu setzen und zu der Integralgleichung ihre Ableitung nach α hinzuzunehmen. Die Elimination von α aus diesen Gl'en

48. $$\begin{cases} z = \omega(x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \\ 0 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\psi'(\alpha) \end{cases}$$

liefert ein Integral mit zwei willkürlichen Functionen.

Beispiel: Es sollen diejenigen Flächen bestimmt werden, in deren sämtlichen Punkten der eine Hauptkrümmungsradius constant ist. — Die Gleichung für die Hauptkrümmungsradien lautet

$$(rt-s^2)\rho^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot\rho + (p^2+q^2+1)^2 = 0;$$

es soll $\rho = a$ sein: die Diff. Gl. der betrachteten Flächenfamilie erscheint in der Form

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt-s^2) = 0$$

wo

$$H = -a(1+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}, \quad K = apq\sqrt{p^2+q^2+1},$$

$$\mathcal{L} = -a(1+p^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\ ,\ \mathcal{M} = p^2+q^2+1\ ,\ \mathcal{N} = a^2$$

$$\mathcal{G} = K^2 - H\mathcal{L} + \mathcal{M}\mathcal{N} = 0$$

ist. Die Diff. Gl.en der Charakteristiken lauten daher

$$a\,dp - (1+p^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx - pq\sqrt{p^2+q^2+1}\,dy = 0$$

$$a\,dq - (1+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}\,dy - pq\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx = 0.$$

Aus ihnen können zwei integrable Combinationen hergestellt werden, deren erste lautet:

$$a(1+q^2)\,dp - [(1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2]\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx - apq\,dq = 0.$$

Aus ihr ergiebt sich

$$dx = a\,\frac{(1+q^2)\,dq - pq\,dx}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = \frac{ap}{\sqrt{p^2+q^2+1}} + \alpha,$$

und wegen der Symmetrie ist auf gleiche Weise

$$y = \frac{aq}{\sqrt{p^2+q^2+1}} + \varphi(\alpha).$$

Hieraus folgt weiter

$$p = \frac{x-\alpha}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2-(y-\varphi(\alpha))^2}}\ ,\quad q = \frac{y-\varphi(\alpha)}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2-(y-\varphi(\alpha))^2}}$$

$$z - y = -\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2-(y-\varphi(\alpha))^2},$$

sodass, wenn noch $y = \psi(\alpha)$ gesetzt wird, das Eliminationsresultat von α aus den Gl~en

$$(x-\alpha)^2 + (y-\varphi(\alpha))^2 + (z-\psi(\alpha))^2 = a^2$$

$$(x-\alpha) + (y-\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha) + (z-\psi(\alpha))\psi'(\alpha) = 0$$

die Gl. der gesuchten Flächenklasse darstellt. Jede Fläche von der geforderten Eigenschaft giebt sich als die Enveloppe einer Schar von Kugeln mit veränderlichem Radius zu erkennen, deren Mittelpunkt sich auf einer Raumcurve $\eta = \varphi(\xi)$, $\zeta = \psi(\xi)$ bewegt, d. h. sie ist eine Kanalfläche.

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken können, wie wir bewiesen haben, ersetzt werden durch das System der beiden Gl~en (45):

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{H}{N}\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Diese Diff. Gl~en sind homogen und linear in V und enthalten V nicht explicite in den Coefficienten, sie haben also die oben (S. 8

eingeführte Form

$$A(U)=0 \qquad B(U)=0,$$

und es gelten für sie die nach der Jacobi'schen Theorie hergeleiteten Sätze. Ist also das System der Diff. Gl'en (45) ein Jacobi'sches, d. h. ist für eine Lösung dieser Gl'en der Ausdruck

$$B(A(U))-A(B(U))=C(U)$$

identisch oder auf Grund der Diff. Gl'en $=0$ so ergiebt sich, dass die Diff. Gl'en der Charakteristiken höchstens $5-2=3$ integrable Combinationen zulassen, und diese Maximalzahl 3 auch nur in dem Falle, dass die Coefficienten von $C(U)$ sämtlich verschwinden. Ist letzteres nicht der Fall, so sind in der angegebenen Weise noch weitere Diff. Gl'en zu den gegebenen hinzuzunehmen, und auf diese Weise kann man sich durch eine endliche Anzahl von Operationen überzeugen ob die vorgelegten Diff. Gl'en mit einander verträglich sind, oder ob man mehr Gl'en erhält, als möglich ist (S. 122). Im ersteren Falle ergeben sich die Integrale durch

die Integration von Systemen gewöhnlicher Diff. Gl.en. Das hiermit vollkommen gekennzeichnete Integrationsverfahren findet sich bei Imschenetsky (a. a. O.) vollständig durchgeführt.
Wenn speciell die Gl. $C(V)=0$ identisch besteht, sodass drei verschiedene Lösungen der Diff. Gl.en der Charakteristiken existieren, so erhält man durch das Verfahren selbst (nämlich durch Elimination von p und q aus den drei Gl.en der Zwischenintegrale) eine particuläre Lösung der gegebenen Diff. Gl. mit drei willkürlichen Constanten. Auf eine solche Lösung lässt sich nach Imschenetsky eine Variation der Constanten anwenden. Es sei

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta) \tag{50.}$$

ein Integral der vorgelegten partiellen Diff. Gl.; da es gleichgültig ist, auf welchem Wege dieses Integral erlangt wurde, so kann auch von der Methode der Charakteristiken vollständig abgesehen werden. Es lässt sich zeigen, dass man durch Variation

der Constanten α, γ, η eine neue partielle Diff. Gl. herstellen kann, sodass die Kenntnis eines solchen particulären Integrales eine Transformation der gegebenen Diff. Gl. in eine andere von möglicherweise einfacherer Form liefert.

Wir betrachten η als Function von α, γ und sodann α, γ, η als Functionen von x und y, wie immer bei der Variation der Constanten; es soll gezeigt werden, dass η, als Function von α und γ betrachtet, einer partiellen Diff. Gl. genügt, welche sicher nicht complicierter ist, als die gegebene,

57. $$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

Wir entnehmen aus $z = \omega$ die Werte

$$p = \omega_{10}, \quad q = \omega_{01}, \quad r = \omega_{20}, \quad s = \omega_{11}, \quad t = \omega_{02}$$

für welche die Gl.

$$F(x, y, \omega, \omega_{10} - - - - \omega_{02}) = 0$$

identisch bestehen muss. Werden nun α, γ als Functionen von x und y betrachtet, so ist

$$p = \omega_{10} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right) \alpha_{10} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma}\right) \gamma_{10}, \quad q = \omega_{01} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right) \alpha_{01} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma}\right) \gamma_{01}$$

und hierbei sind die Ableitungen $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$
so zu nehmen, dass gleichzeitig η als Function von α und y angenommen wir[d]
also z. B.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}.$$

Es soll von vornherein über α und y so verfügt werden, dass p und q der Form nach ungeändert bleiben, d. h. dass nach der Variation der Constanten die Formeln gelten

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)\alpha_{10} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)y_{10} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)\alpha_{01} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)y_{01} = 0$$

aus welchen $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ berechnet werden können. Nun ist der Fall, dass die Determinante verschwindet,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

als schon behandelt auszuschliessen.
(Es wäre nämlich y, also auch η eine Function von α al[lein.])
Folglich ist

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

zu setzen, und so bleiben die Differentia[l]quotienten erster Ordnung bei der Variation der Constanten ungeändert.
Ferner haben wir:

$$52.\quad \begin{cases} r = \omega_{20} + \left(\frac{\partial \omega_{10}}{\partial \alpha}\right)\alpha_{10} + \left(\frac{\partial \omega_{10}}{\partial y}\right) y_{10} = \omega_{20} + h \\ s = \omega_{11} + \left(\frac{\partial \omega_{10}}{\partial \alpha}\right)\alpha_{01} + \left(\frac{\partial \omega_{10}}{\partial y}\right) y_{01} = \omega_{11} + k \\ s = \omega_{11} + \left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \alpha}\right)\alpha_{10} + \left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial y}\right) y_{10} = \omega_{11} + k' \\ t = \omega_{02} + \left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \alpha}\right)\alpha_{01} + \left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial y}\right) y_{01} = \omega_{02} + l \end{cases}$$

und es muss, falls $z=\omega$ ein Integral der Diff. Gl. $F=0$ sein soll, die Gleichung bestehen:

$$F(x, y, \omega, \omega_{10}, \omega_{01}, \omega_{20}+h, \omega_{11}+k, \omega_{02}+l) = 0$$

Es handelt sich zunächst noch darum, die Grössen $\alpha_{10}, \alpha_{01}, y_{10}, y_{01}$ wegzuschaffen. Durch Differentiation der Gl. $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}=0$ nach x erhalten wir:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)}{\partial \alpha}\alpha_{10} + \frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)}{\partial y} y_{10} = 0\,;$$

Hierin ist aber

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x}}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial x}\right),$$

folglich erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\right)\alpha_{10} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial y}\right) y_{10} = 0.$$

Durch Differentiation der Gl. $\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)=0$ ergiebt sich ebenso:

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial \alpha}\right)+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)\alpha_{10}+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)y_{10}=0,$$

und durch Differentiation der beiden Gl'en nach y:

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)\alpha_{01}+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)y_{01}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)\alpha_{01}+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)y_{01}=0$$

Aus diesen vier Gl'en folgt zur Bestimmung von $\alpha_{10}, \alpha_{01}, y_{10}, y_{01}$:

52*.

$$\begin{cases} D\,\alpha_{10}+\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)=0\\ D\,\alpha_{01}+\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)=0\\ D\,y_{10}+\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)-\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)=0\\ D\,y_{01}+\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)-\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)=0 \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung

$$D=\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right]^2$$

gesetzt wird. Alsdann findet man durch Einsetzen:

$$h=-\frac{1}{D}\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial y}\right)\right]^2-2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial\alpha}\right)\right]^2\right.$$

$$k=k'=-\frac{1}{D}\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\omega_{10}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial\alpha}\right)\right]+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\omega_{1}}{\partial\alpha}\right)\right.$$

$$l=-\frac{1}{D}\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial y}\right)\right]^2-2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial\alpha}\right)\right]^2\right\}$$

und ferner:

$$h l - k^2 = \frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial \omega_{10}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \gamma}\right) - \left(\frac{\partial \omega_{10}}{\partial \gamma}\right)\left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \alpha}\right)\right]^2 \tag{52a}$$

Wir wollen jetzt die Diff. Gl. $F = 0$ nach Potenzen von h, k, l entwickeln. Da sie der Monge-Ampère'schen Klasse angehören soll, so kann sie geschrieben werden:

$$F \equiv H\omega_{20} + 2K\omega_{11} + L\omega_{02} + M + N(\omega_{20}\omega_{02} - \omega_{11}^2) = 0,$$

und infolgedessen ist:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_{20}} = H + N\omega_{02}, \quad \frac{\partial F}{\partial \omega_{11}} = 2(K - N\omega_{11}), \quad \frac{\partial F}{\partial \omega_{02}} = L + N\omega_{20}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_{20}^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_{20}\partial \omega_{11}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_{20}\partial \omega_{02}} = N$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_{11}^2} = -2N \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_{02}\partial \omega_{11}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_{02}^2} = 0.$$

Daher ergiebt die Entwicklung nach Wegschaffung des Nenners D:

$$A h + B k + C l + E(h l - k^2) = 0 \tag{53}$$

oder, ausführlicher geschrieben:

$$(H + N\omega_{02})h + 2(K - N\omega_{11})k + (L + N\omega_{20})l + N(hl - k^2) = 0.$$

Werden jetzt die Werte von h, k, l eingesetzt, so ergiebt sich eine Gleichung von folgender Form:

$$A'\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2} + B'\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial y} + C'\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \mathcal{E}' = 0$$

was dem Umstande zu verdanken ist, dass h, k, l die Differentialquotienten $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial y}, \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$ bezüglich nur in der ersten Poten enthalten, indem z. B. h die Grösse

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$$

enthält. – Für $A', B', C', \mathcal{E}'$ ergeben sich complicier Ausdrücke.

Es ist wesentlich, dass die Multiplication mit D diese Grösse ganz zum Wegfall bring sodass die transformierte Diff. Gl. in der zuletzt geschriebenen Form in Bezug auf die zweiten Ableitungen von η linear ist. Dies Ergebnis würde sich dann ändern, wenn das Anfangsglied in der Entwicklu von F nach Potenzen von h, k, l nicht $=0$ gesetzt werden darf, d. h. wenn ω kein Integral der Diff. Gl. $F=0$ ist. Aber in dies Falle tritt auch nur noch ein Glied mi der Determinante $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial y}\right)^2$ als Factor

hinzu, und daher haben wir den Satz:
Die Verwendung einer Gl. $z=\omega(x,y,\alpha,\gamma,\eta)$ mit drei willkürlichen Constanten zur Transformation einer Diff. Gl. der Monge-Ampère-schen Klasse ergiebt wieder eine Diff. Gl. derselben Klasse; ist aber $z=\omega$ ein Integral der ursprünglichen Diff. Gl, so wird die transformierte linear in Bezug auf die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Die Coefficienten $A' \dots E'$ der transformierten Diff. Gl. können leicht, wie noch bemerkt sein möge, durch $\alpha, \gamma, \eta, \frac{\partial\eta}{\partial z}, \frac{\partial\eta}{\partial y}$ ausgedrückt werden.
Wir wollen uns jetzt nur noch mit einer speciellen Diff. Gl. der Monge-Ampère-schen Klasse beschäftigen, nämlich mit der Liouville-schen Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^z. \tag{55}$$

Das Integral ist von Liouville in seiner Ausgabe von Monge-s „Applications de l'Analyse à la Géométrie" angegeben worden, während seine ausführliche Herleitung

sich im 18 Bande des Journal de Mathématiques findet. Folgende flächentheoretische Aufgabe führt auf die Diff. Gl.
wenn eine Fläche mit constantem Krümmungsmasse

$$K = \pm \frac{1}{a^2}$$

auf isometrische Coordinaten bezogen ist, sodass

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

ist, so soll die Diff. Gl., welcher λ genügt, aufgestellt werden.
Da nämlich

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2}\right)$$

ist, so muss λ die Gl.

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \pm \frac{2\lambda}{a^2} = 0$$

befriedigen. Eine solche partielle Diff. Gl. aber kann nach der Euler'schen Methode so reducirt werden, dass für ein neues System unabhängiger Variabeln x, y nur eine der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in der Gl. zurückbleibt.
Aus der zu lösenden Hülfsgleichung:

$$du^2 + dv^2 = 0$$

ziehen wir:

$$u + vi = x \;,\quad u - vi = y$$

und bilden jetzt einfach, ohne auf die allgemeinen Formeln der Euler-schen Transformationsmethode zurückzugreifen:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = i\left(\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial y^2}\,, \quad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} = i\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x^2} i - 2\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} i + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial y^2} i\right).$$

Daher ergiebt sich als transformierte Gl.:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$$

oder, wenn noch

$$\log \lambda = z \;,\quad \lambda = e^z$$

gesetzt wird:

$$s = Ce^z.$$

Liouville setzt zur weiteren Transformation:

$$\lambda = \mp 2a^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\,,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Durch Integration in Bezug auf x kommt:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = \vartheta + f(y)\,,$$

folglich:
$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} = \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + f(y) \frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$
worauf die nochmalige Integration in Bezug auf x ergiebt:
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{2} \vartheta^2 + f(y) \vartheta + g(y),$$
wo f, g unbestimmt bleiben. Hierdurch ist das Problem der Integration der Liouville-schen Diff. Gl. auf die einer allgemeinen Riccati-schen Diff. Gl. zurückgeführt, welche bekanntlich bei Kenntnis einer Particularlösung integrabel ist. Eine solche particuläre Lösung sei
$$\vartheta = \varpi(y),$$
sodass identisch
$$\varpi'(y) = \frac{1}{2} \varpi^2 + f(y) \varpi + g(y)$$
ist. Man hat nun bekanntlich für ς als neue unabhängige Variable zu setzen:
$$\vartheta = \varpi(y) - \frac{1}{\varsigma};$$
dann ergiebt die Durchführung der Transformation:
$$\varpi'(y) + \frac{1}{\varsigma^2} \frac{\partial \varsigma}{\partial y} = \frac{1}{2} \varpi^2(y) - \frac{\varpi}{\varsigma} + \frac{1}{2\varsigma^2} + f(y) \varpi(y) - \frac{f(y)}{\varsigma} +$$

oder mit Berücksichtigung vorstehender Identität und nach Multiplication mit s^2:

$$\frac{\partial s}{\partial y} + (f(y) + \varpi(y))\, s - \frac{1}{2} = 0,$$

eine Diff. Gl. von der Form

$$\frac{\partial s}{\partial y} + P s + Q = 0$$

welche das Integral

$$s = e^{-\int P dy} \left\{ \varphi(x) + \int e^{\int P dy} Q\, dy \right\}$$

hat. Für den vorliegenden Fall ist $P = f(y) + \varpi(y)$, $Q = -\frac{1}{2}$; $f(y)$ ist als eine willkürliche Function anzusehen, und daher kann auch

$$-\frac{1}{2} \int e^{\int (f(y) + \varpi(y)) dy} dy = \psi(y)$$

gesetzt werden. Da aus diesem Ansatze noch durch Differentiation folgt:

$$e^{\int (f(y) + \varpi(y)) dy} = -2\psi'(y)$$

so ergiebt sich:

$$s = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{-2\psi'(y)}$$

folglich:

$$\vartheta = \varpi(y) + \frac{2\psi'(y)}{\varphi(x) + \psi(y)},$$

es ist daher

$$\lambda = \pm 2a^2 \frac{\varphi'(x)\,\varphi'(y)}{(\varphi(x)+\varphi(y))^2}$$

das Integral der Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0.$$

Die Theorie der Liouville'schen Diff. Gl ermöglicht es, eine vollständige Klasse auf einander abwickelbarer Flächen anzugeben. In der Theorie der linearen Diff. Gl'en wurde gezeigt (S. 202 ff.), dass jede Integration der Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m}{(x-y)^2} z$$

eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen kennen lehrt. Der Zusammenhang beruhte auf dem Ausdruck der Summe der beiden Hauptkrümmungsradien dargestellt durch den Abstand der Tangentialebene vom Coordinaten-anfangspunkte, nämlich durch $P = xX + yY + zZ$; es war

$$\rho_1 + \rho_2 = -2P + \Delta_e^2 P$$

wo $\Delta_e^2 P$ in Bezug auf das Linienelement

der Gauss'schen Kugel zu bilden ist. Durch passende Specialisierung wurde

$$\Delta_e^2 P = (u-v)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}$$

erhalten. Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass der Ansatz

$$\rho_1 + \rho_2 = -2P + \frac{2}{a}\left(e^{aP} - 1\right)$$

auf die Liouville'sche Diff. Gl. führt. Wir haben alsdann die Diff. Gl.

$$(u-v)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + \frac{2}{a}\left(e^{aP} - 1\right) = 0;$$

auf sie möge die Transformation

$$P = b \log(u-v) + c \cdot S$$

angewendet werden, wo S die neue abhängige Veränderliche, b und c noch zu bestimmende Constanten bezeichnen. Es kommt

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{b}{u-v} + c\frac{\partial S}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = \frac{b}{(u-v)^2} + c\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v};$$

die Einsetzung ergiebt daher

$$(u-v)^2\left(\frac{b}{(u-v)^2} + c\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}\right) = \frac{2}{a}\left(1 - (u-v)^{ab} e^{acS}\right).$$

Jetzt setzen wir $b = \frac{2}{a}$, sodass die

Anfangsglieder auf beiden Seiten der Gl fortfallen; nach Streichung dieser Glieder aber kann durch $(u-v)^2$ dividiert werden, sodass

$$c\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = -\frac{2}{a} e^{acs}$$

bleibt. Wird jetzt noch $ac = 1$ angenommen so folgt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = -2e^{s},$$

d.h. wie behauptet, eine Liouville'sche Gl
Bezüglich des Zusammenhanges dieser Gl'en mit der Theorie der Abwickelung ist eine in den Comptes Rendus 1891 veröffentlichte Arbeit von Weingarten zu vergleichen.

Die letzte Klasse specieller Diff. Gl'en zweiter Ordnung, welche wir betrachten, bilden die Diff. Gl'en der Form

56. $$F(r, s, t) = 0$$

welche wir nach Legendre (Comptes rend. 1787) behandeln wollen. Die vorgelegte Diff. Gl., welche an veränderlichen Grössen nur die Differentialquotiente zweiter Ordnung enthalten soll, möge

z. B. nach r aufgelöst lauten:

$$r = f(s,t).$$

Es werde statt z die abhängige Variable w eingeführt durch die Gleichung

576ˣ $$x\,ds + y\,dt = dw,$$

in welcher jetzt s und t die unabhängigen Veränderlichen sein sollen. Zuerst ist nachzuweisen, dass dw ein vollständiges Differential ist. Nun ist

$$d(xs + yt) = x\,ds + y\,dt + s\,dx + t\,dy,$$

folglich

576ᵃ $$x\,ds + y\,dt = d(xs + yt - q),$$

wir können daher setzen:

$$w = xs + yt - q.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

576ᵇ $$x\,dr + y\,ds = d(xr + ys - p),$$

und nun können wir die partielle Diff. Gl. aufstellen, welcher w als Function von s, t genügt. Aus $r = f(s,t)$ folgt:

$$dr = \frac{\partial f}{\partial s}ds + \frac{\partial f}{\partial t}dt = l\,ds + m\,dt,$$

und daher ist

$$d(xr + ys - p) = (xl + y)ds + xm\,dt.$$

Da dieser Ausdruck ein vollständiges

Differential ist, so muss die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial(xl+y)}{\partial t} = \frac{\partial(xm)}{\partial s}$$

erfüllt sein:

$$x\frac{\partial l}{\partial t} + l\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} = x\frac{\partial m}{\partial s} + m\frac{\partial x}{\partial s},$$

oder, da $\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial s}$, ferner $x = \frac{\partial w}{\partial s}$, $y = \frac{\partial w}{\partial t}$, ist:

57. $$l\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Diff. Gl.; l, m sind Functionen von s und t, die Diff. Gl. ist homogen und linear und kann daher nach der Euler'schen Methode weiter behandelt werden.

Ist w als Function von s, t gefunden, so ergeben sich x und y durch Differentiation und dies zieht auch durch die Formel

$$xs + yt - q = w$$

die Bestimmung von q nach sich. Nachdem auch p aus

$$p = xr + ys - \int(x\,dr + y\,ds)$$

als Function von s und t bestimmt ist, ergiebt die Integration des Differentials

$$dz = p\,x + q\,dy$$

z durch dieselben Grössen ausgedrückt. Endlich folgt durch Elimination von s, t die gesuchte Integralgleichung zwischen x, y, z.

Capitel 6.

Bei allen von uns untersuchten Diff. Gl~en betrachteten wir das Integrationsproblem als gelöst, wenn es gelang, die vorgelegte Diff. Gl. bezw. das System der vorgelegten Diff. Gl~en auf ein System gewöhnlicher Diff. Gl~en zurückzuführen, indem es als bekannt angenommen wurde, dass ein solches System unter gewissen Voraussetzungen, welche die Functionentheorie liefert, ein Integral besitzt. Nun ist es aber durchaus nicht immer möglich, das Problem in dieser Weise umzuwandeln. Wenn zum Beispiel eine Diff. Gl. der Monge-Ampère~schen Klasse vorgelegt ist, so liefert das System der Charakteristiken nicht immer integrable Combinationen, und zwar giebt, wie wir gesehen haben, die Jacobi~sche Theorie die Entscheidung hierüber. Man wird so auf die Frage geführt, ob und in welchem Sinne eine partielle Diff. Gl. ein Integral hat, falls die Reduct-

auf ein System gewöhnlicher Diff. Gl^en nicht möglich ist. Der Beweis, dass ein solches Integral unter gewissen Voraussetzungen existiert, kann wie die Mehrzahl solcher Beweise durch Reihenentwicklung geführt werden. Dabei ist es oft zweckmässig anzunehmen, dass die abhängige Variable z in der vorgelegten Diff. Gl. nicht explicite vorkommt, wie es bei der Jacobischen Theorie der Diff. Gl^en erster Ordnung notwendig war. Diese Bedingung kann immer durch eine einfache Transformation erfüllt werden. Es sei z. B. die Diff. Gl. erster Ordnung

a. $$F(x_1 \cdots x_n, z, p_1 \cdots p_n) = 0$$

gegeben, und es sei

b. $$z = f(x_1 \cdots x_n)$$

eine aus der Integralgleichung

$$V(z, x_1, x_2 \cdots x_n) = 0$$

hervorgegangene Lösung dieser Diff. Gl. Da also (b) und (c) identisch sind, so müssen die aus (c) folgenden Werte

für $p_1 \cdots p_n$, welche nämlich aus

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad (\nu = 1, 2 \cdots n)$$

zu entnehmen sind, in (a) eingesetzt ein identisch erfülltes Resultat ergeben; es ist also

$$\text{d.} \qquad F\left(x_1, x_2 \cdots x_n, z, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \cdots\cdots -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right) = 0.$$

Diese aus (a) durch (c) transformierte Gl. kann als partielle Diff. Gl. erster Ordnung zur Bestimmung von V betrachtet werden; jedoch ist die Anzahl der unabhängigen Variabeln um eine, nämlich z vergrössert worden, während die abhängige Variable V nicht explicite vorkommt. Die Integrationsprobleme der Diff. Gl-en (a) und (d) decken sich offenbar, wenigstens abgesehen von singulären Fällen.
Dass diese Methode sich auf Diff. Gl-en höherer Ordnung ausdehnen lässt, ist unmittelbar ersichtlich.
Den Beweis der Existenz eines Integrales einer partiellen Diff. Gl. soll für eine

partielle Diff. Gl. zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln geführt werden; die Methode wird erkennen lassen, wie der Beweis auf eine allgemeine partielle Diff. Gl. erweitert werden kann. Wir schliessen uns an die Abhandlung von S. v. Kowalewski (Crelle Bd. 80) im wesentlichen an.

Die linke Seite der gegebenen partiellen Diff. Gl.

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

sei zunächst eine ganze Function ihrer Argumente; diese Einschränkung lässt sich, wie sich herausstellen wird, auch dahin verallgemeinern, dass unter F eine beständig convergierende Potenzreihe verstanden wird. Ferner sei F irreductibel in dem Sinne, dass F nicht in ein Product von mehreren Functionen von derselben Art wie F zerlegt werden kann. Wir können nun, wie soeben gezeigt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiter voraussetzen, dass z in F explicite

nicht auftritt; doch wollen wir statt dessen lieber die specielle Voraussetzung machen dass von den Differentialquotienten zweiter Ordnung r, t mindestens eine z. B. r, in F explicite auftritt. Angenommen nämlich, dies sei nicht der Fall, so genügt eine specielle lineare Transformation

$$x_1 = \alpha x + \beta y \quad , \quad y_1 = \gamma x + \delta y,$$

um das Auftreten von r zu bewirken. Hieraus folgt nämlich, wenn $\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 \cdots\cdots$ bezeichnet wird:

$$p = p_1 \alpha + q_1 \gamma \qquad q = p_1 \beta + q_1 \delta$$

$$s = \alpha (r_1 \beta + s_1 \delta) + \gamma (s_1 \beta + t_1 \delta)$$

$$= \alpha \beta r_1 + (\alpha \delta + \beta \gamma) s_1 + \gamma \delta t_1,$$

sodass unendlich viele Substitutionen gefunden werden können, durch welche der verlangte Zweck erreicht wird.

Wir wollen jetzt versuchen, die vorgeleg. Diff. Gl.

58. $$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

formell durch eine Potenzreihe

59. $$z = \mathfrak{P}(x, y \mid a, b)$$

zu befriedigen, welche nach positiven

ganzen Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitet, wo (a,b) ein beliebig gegebenes Wertepaar der unabhängigen Variabeln ist. Es sei

$$z = \sum_{\lambda,\mu}^{0\ \infty} c_{\lambda\mu} \frac{(x-a)^\lambda}{\lambda!} \frac{(y-b)^\mu}{\mu!}$$

$$= c_{00} + c_{10}(x-a) + c_{01}(y-b) + c_{20}(x-a)^2 + c_{11}(x-a)(y-b) + c_{02}(y-b)^2 + \cdots$$

so folgt

$$p = c_{10} + c_{20}(x-a) + \cdots\cdots, \quad q = c_{01} + c_{11}(x-a) + \cdots\cdots$$

$$r = c_{20} + \cdots\cdots$$

$$s = c_{11} + \cdots\cdots$$

$$t = c_{02} + \cdots\cdots$$

Wird nun (59.) in die Diff.-Gl. eingesetzt und $x=a$, $y=b$ gesetzt, so muss nach Voraussetzung (58) erfüllt sein, also ist

$$F(a, b, c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}) = 0$$

zu setzen, und allgemein muss

$$F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{59a}$$

sein für alle Werte (x, y) eines gewissen Bereiches, welcher die Stelle a, b enthält. Es möge die für z angenommene Reihe, nach Potenzen von $(x-a)$ entwickelt, die Form haben:

59.ª $$p(x,y\mid a,b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(y\mid b)\frac{(x-a)^\nu}{\nu!} = \varphi_0(y\mid b) + \varphi_1(y\mid b)(x-a) + \varphi_2(y\mid b)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

Es besteht aber die Gleichung (59ª) speciell für $x=a$ und für Werte von y, welche nicht gleich b sind. Wenn wir also mit Hülfe des letzten Ansatzes die Ableitungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varphi_1 + \varphi_2(x-a) + \cdots$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x-a) + \cdots$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \varphi_2 + \cdots$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x-a) + \cdots$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(x-a) + \cdots$$

bilden, so ergiebt sich aus ihren für $x=a$ genommenen Werten, dass auch die Gl.

60. $$F\left(a, y, \varphi_0, \varphi_1, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \varphi_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}\right) = 0$$

für eine gewisse Umgebung der Stelle $y=b$ bestehen muss. Diese Gl. ist nun geeignet, φ_2 zu bestimmen, falls φ_0 und φ_1 bekannt sind oder als bekannt gelten. Dabei ist zu bemerken, dass nach der

Herleitung das Argument φ_2 an die Stelle von r in (58) getreten ist, und da r in (58) der Voraussetzung zufolge explicite vorkommt, so lässt sich φ_2 vermöge der Entwicklung von (60),

$$\frac{\partial F}{\partial r}\varphi_2 + \cdots\cdots = 0$$

als Potenzreihe von $(y-b)$ bestimmen, wenn φ_0 und φ_1 als ebensolche Potenzreihen gegeben sind.

Wir schreiben jetzt weiter zur Bestimmung von $\varphi_3, \varphi_4 \cdots$

Wir differentiieren die Gl. (59ᵃ) nach x, setzen $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = r$ und schreiben, unter Bevorzugung der höchsten vorkommenden Ableitung von p nach x:

$$\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \cdots\cdots = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für $x=a$, da

$$\left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\right)_{x=a} = \varphi_3(y|b), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{x=a} = F_0',$$

die Bestimmungsgleichung für φ_1:

$$F_0'\,\varphi_3(y|b) + G(a, y \cdots) = 0,$$

welche eine Potenzreihe des Argumentes $y-b$ für φ_3 liefert, wenn nicht $F_0' = 0$ ist. Nun verschwindet $\frac{\partial F}{\partial r}$ nicht identisch nach der Voraussetzung; es könnte aber trotzdem eine Potenzreihe $p(x,y\,|\,a,b)$ geben, welche für alle Wertepaare eines gewissen Bereiches gleichzeitig die Gl-en $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial r}=0$ befriedigte. Dies soll nun ebenfalls ausgeschlossen werden, es soll $F_0' \gtrless 0$ sein, d.h. es soll c_{20} eine einfache Wurzel der Gl

$$F(a, b, c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}) = 0$$

sein. Nachdem aber diese Voraussetzung gemacht ist, können sämtliche folgenden φ_ν bestimmt werden. Es werde nämlich die Gl. (59^a) λ mal nach x differentiiert, sodass sich

$$\frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{\partial^{\lambda+2} p}{\partial x^{\lambda+2}} + H_\lambda(x, y, \cdots) = 0$$

ergiebt, wobei in H_λ die Ableitungen von p nach x höchstens bis zur $(\lambda+1)$ten Ordnung aufsteigen. Insbesondere folgt für $x=a$:

$$F_0'\,\varphi_{\lambda+2}(y\,|\,b) + H_{\lambda,0}(a, y, \cdots) = 0,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{C}_{\lambda+2}(y\,|\,b) = -\frac{H_{\lambda 0}}{F_0'}$$

als eine Potenzreihe des Argumentes $(y-b)$.
Es ist nun weiterhin zu untersuchen, ob die auf die soeben geschilderte Weise erhaltene Potenzreihe, welche die gegebene Diff. Gl. formell befriedigt, innerhalb eines wenn auch noch so kleinen Bereiches convergiert.
Der Convergenzbeweis wird mit Hülfe eines speciellen Systemes partieller Diff. Gl-en geführt. Es mögen $r+1$ unabhängige Variabeln

$$x,\ x_1,\ x_2 \cdots\cdots x_r$$

angenommen werden, als Functionen von welchen

$$z_1\ z_2 \cdots\cdots z_n$$

aus n simultanen partiellen Diff. Gl-en erster Ordnung bestimmt werden sollen. Letztere mögen, unter Bevorzugung der unabhängigen Variabeln x die Form haben:

$$61. \begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{G}_{1\nu}^{(1)}(z_1 \cdots z_n)\frac{\partial z_\nu}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{G}_{r\nu}^{(1)}(z_1 \cdots z_n)\frac{\partial}{\partial} \\ \text{-- -- -- -- -- --} \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{G}_{1\nu}^{(n)}(z_1 \cdots z_n)\frac{\partial z_\nu}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{G}_{r\nu}^{(n)}(z_1 \cdots z_n) \end{cases}$$

oder

$$\frac{\partial z_\lambda}{\partial x} = \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{G}_{\rho\nu}^{(\lambda)}(z_1 \cdots z_n)\frac{\partial z_\nu}{\partial x_\rho}, \quad (\lambda = 1, 2 \cdots n)$$

wobei die Grössen $\mathcal{G}_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ Potenzreihen sind welche nach positiven Potenzen von $z_1, z_2 \cdots z_n$ fortschreiten und innerhalb eines gewissen Bereiches convergieren. Wir haben zunächst zu zeigen, dass für $z_1, z_2 \cdots z_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x, x_1 \cdots x_r$ gesetzt werden können, welche dem Systeme (61) formell genügen.
Es werde daher

$$z_\lambda = \varphi_\lambda(x, x_1, x_2 \cdots x_r)$$

angesetzt oder, da in den Gl-en (61) x bevorzugt wurde:

$$61^a. \quad z_\lambda = \varphi_{\lambda 0}(x_1 \cdots x_r) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_{\lambda\alpha}(x_1 \cdots x_r)\frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

Hieraus folgt:

$$61^b. \quad \frac{\partial z_\lambda}{\partial x} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_{\lambda\alpha}(x_1 \cdots x_r)\frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \quad \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\rho} = \frac{\partial \varphi_{\lambda 0}}{\partial x_\rho} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{\lambda\alpha}}{\partial x_\rho}\frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

und folglich für $x=0$ aus (61):

$$\varphi_{\lambda 1}(x_1 \dots x_r) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n} G_{\rho\nu}^{(\lambda)}(\varphi_{10} \dots \varphi_{n0}) \frac{\partial \varphi_{\nu 0}}{\partial x_\rho}, (\lambda = 1 \dots n) \tag{62}$$

Durch diese Formel sind die Functionen $\varphi_{\lambda 1}$ durch die Functionen $\varphi_{\lambda 0}$ ausgedrückt. Wir können nun in derselben Weise weiter gehen, d. h. wir können entweder (61) weiter differentiieren und nach Einführung des Ansatzes (61ª) unter Benutzung von (62) $x=0$ setzen, oder von vornherein die Entwicklung benutzen, die durch Einführung jenes Ansatzes in (61) entsteht, insofern auch höhere Potenzen von x in Betracht kommen. Dann ergiebt sich, dass die Functionen $\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha}, \dots \varphi_{n\alpha}$ $(\alpha > 0)$ durch die Functionen $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots \varphi_{n0}$ und ihre Ableitungen nach $x_1 \dots x_r$ bis zu einer bestimmten Ordnung ausgedrückt werden können. Nun sind aber die Functionen $\varphi_{1\alpha} \dots \varphi_{n\alpha}$ Potenzreihen von $x_1 \dots x_r$, und zwar ist, wenn der Coefficient des Gliedes

$$\frac{x_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdot \frac{x_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \cdots \frac{x_r^{\alpha_r}}{\alpha_r!}$$

durch

$\varphi_{\lambda\alpha,\alpha_1\cdots\alpha_r}$
bezeichnet wird:

$$\varphi_{\lambda\alpha}(x_1, x_2 \cdots x_r) = \sum_{\alpha_1\cdots\alpha_r}^{0,\infty} \varphi_{\lambda\alpha,\alpha_1\cdots\alpha_r} \frac{x_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{x_r^{\alpha_r}}{\alpha_r!}.$$

Wir erhalten also für $\alpha > 0$ ein System von Formeln zur Bestimmung von $\varphi_{\lambda\alpha,\alpha_1\cdots\alpha_r}$, Formeln, in denen natürlicherweise auch die Coefficienten der Potenzreihen $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ in bestimmter Weise auftreten. Es ergiebt sich dabei, dass jeder der zu bestimmende[n] Coefficienten $\varphi_{\lambda\alpha,\alpha_1\cdots\alpha_r}$ eine ganze rationale Function von einer bestimmten Anzahl der Coefficienten der $\varphi_{\lambda 0}$ und $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ wird, wenigstens unter der Voraussetzung, die wir vorläufig machen wollen, dass sämtliche Functionen $\varphi_{\lambda 0}$ verschwinden[,] wenn gleichzeitig $x_1 = 0 \cdots x_r = 0$ gesetzt wir[d]. Um nun die Convergenzfrage bezüglich der Functionen $\varphi_{\lambda\alpha}$ zu beantworten, ordne[n] wir dem Systeme (61) ein anderes zu, in welchem die Potenzreihen $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ durch ande[re] $H_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ ersetzt sind, deren Coefficienten mindestens gleich den absoluten Beträgen

der entsprechenden Coefficienten in $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ sind. Dieses System möge lauten:

$$\frac{\partial \varsigma_\lambda}{\partial x} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n} H_{\rho\nu}^{(\lambda)}(\varsigma_1 \cdots \varsigma_n) \frac{\partial \varsigma_\nu}{\partial x_\rho}, \quad (\lambda = 1 \cdots n). \tag{63}$$

Es kann auf dieselbe Weise wie das System (61) formell befriedigt werden durch die Grössen

$$\varsigma_\lambda = \psi_{\lambda 0}(x_1 \cdots x_r) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_{\lambda\alpha}(x_1 \cdots x_r) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

und dabei kann wegen der Willkürlichkeit der Anfangsglieder $\psi_{\lambda 0}$ angenommen werden dass ihre Coefficienten mindestens gleich den absoluten Beträgen der entsprechenden Coefficienten in $\varphi_{\lambda 0}$ sind. Auf dieser Annahme sowie auf dem Umstande, dass die $\psi_{\lambda\alpha}$ sich aus den Coefficienten der $\psi_{\lambda 0}$ und $H_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ rational zusammensetzen, beruht die Thatsache, dass die Convergenz der Lösungen von (63) auch die der Lösungen von (61) nach sich zieht. Es fragt sich also, ob es möglich ist, Functionen $H_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ so zu bestimmen dass die Diff. Gl^en (63) durch convergente Potenzreihen $\varsigma_1, \varsigma_2 \cdots\cdots \varsigma_n$

befriedigt werden können, welche nach positiven Potenzen von $x_1 \cdots x_r$ fortschreiten. Der Convergenzbereich der Functionen $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}(z_1, z_2 \cdots z_n)$ sei durch die Ungleichheitsbedingungen

$$|z_1| < a_{\rho\nu,1}^{(\lambda)} \quad |z_2| < a_{\rho\nu,2}^{(\lambda)} \quad \cdots \quad |z_n| < a_{\rho\nu,n}^{(\lambda)}$$

gekennzeichnet. Denn convergieren sämtliche Functionen $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ in einem Gebiete, welches durch die Bedingungen

$$|z_1| < a \quad |z_2| < a \quad \cdots\cdots \quad |z_n| < a$$

begrenzt wird, wenn a die kleinste unter den Zahlen $a_{\rho\nu i}^{(\lambda)}$ bezeichnet. Nach einem bekannten Satze der Functionentheorie lässt sich alsdann eine positive Zahl g so bestimmen, dass jeder Coefficient in der Entwicklung der Function

$$\frac{g}{1 - \frac{z_1 + \cdots + z_n}{a}} = H$$

nach Potenzen von $z_1 \cdots z_n$ positiv und seinem absoluten Betrage nach mindestens gleich dem des entsprechenden Coefficienten von $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ ist. Diese Function H ist also geeignet, an die Stelle irgend einer der

Functionen $H^{(\lambda)}_{\rho\nu}$ zu treten, nachdem $z_1 \cdots z_n$ durch $\varsigma_1 \cdots \varsigma_n$ ersetzt ist. In gleicher Weise kann für jede der Functionen $\psi^{(\lambda)}_{\rho\nu}$ der Quotient

$$\frac{q'}{1 - \frac{x_1 + \cdots + x_r}{a'}}$$

angenommen werden, oder vielmehr, da jene Functionen für $x_1 = 0 \cdots x_r = 0$ verschwinden sollen, der Quotient

$$\frac{q'(x_1 + \cdots + x_r)}{1 - \frac{x_1 + \cdots + x_r}{a'}} = \psi.$$

Durch Einführung der Function H geht die erste der Gl-en (63) in

$$\frac{\partial \varsigma_1}{\partial x} = H \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varsigma_\nu}{\partial x_\rho}$$

über, und zugleich ergiebt sich

$$\frac{\partial \varsigma_1}{\partial x} = \frac{\partial \varsigma_2}{\partial x} = \cdots = \frac{\partial \varsigma_n}{\partial x}.$$

Aus diesen letzten Gl-en folgt, dass z. B. $\varsigma_1 - \varsigma_2$ eine von x unabhängige Function wird; nun wird aber für $x = 0$ $\varsigma_1 = \varsigma_2 = \psi$, also von x unabhängig, folglich ist überhaupt

$$\varsigma_1 = \varsigma_2 = \cdots = \varsigma_n.$$

Daher ergiebt sich die einzige Diff. Gl.

$$\frac{\partial s_1}{\partial x} = nH\sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial s_1}{\partial x_\rho} = nH\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}+\frac{\partial s_1}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial s_1}{\partial x_r}\right)$$

sie geht durch die Substitution

$$\frac{x_1+\cdots+x_r}{a'} = y$$

in

$$\frac{\partial s_1}{\partial x} = \frac{nq}{1-\frac{ns_1}{a}}\cdot\frac{r}{a'}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial y},$$

oder, wenn noch

$$\frac{ns_1}{a} = s$$

gesetzt wird, in

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ngr}{a'}\frac{1}{1-s}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\alpha}{1-s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

über, wo α eine positive Constante bezeichnet.
Zu dieser Diff. Gl.

$$\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\alpha}{1-s}\frac{\partial s}{\partial y} = 0$$

gehört das System gewöhnlicher Diff. Gl'en

$$dx = -\frac{(1-s)\,dy}{\alpha} = \frac{ds}{0},$$

aus deren particulären Integralen

$$s = C \quad , \quad \alpha x + (1-C)y = C'$$

das allgemeine folgt in der Form

$$\alpha x + (1-s)y = \varphi(s).$$

Die hier noch willkürlich erscheinende Function φ kann durch die Nebenbedingung bestimmt werden, dass für $x=0$ jede der

Functionen $\varsigma_1 \dots \varsigma_n$ sich auf ψ reducieren soll, dass also

$$\psi = \frac{g'a'y}{1-y} = \frac{\beta y}{1-y},$$

wo β eine positive Constante, der gemeinsame Wert dieser Functionen werden soll. Für $x=0$ ist daher

$$\varsigma = \frac{by}{1-y},$$

wo b ebenfalls eine positive Constante, und die Integralgleichung erhält die Form

$$\left(1-\frac{by}{1-y}\right)y = \varphi\left(\frac{by}{1-y}\right).$$

Aus dieser Gl. bestimmt sich φ in der einfachsten Weise, wenn

$$\frac{by}{1-y} = \eta, \qquad y = \frac{\eta}{b+\eta}$$

gesetzt wird; alsdann ergiebt sich nämlich

$$(1-\eta)\frac{\eta}{b+\eta} = \varphi(\eta),$$

folglich

$$\alpha x + (1-\varsigma)y = (1-\varsigma)\frac{\varsigma}{b+\varsigma}. \tag{64.}$$

Bei der Ausrechnung von ς aus dieser quadratischen Gl. ist das Vorzeichen der auftretenden Wurzel so zu wählen, dass die Nebenbedingung erfüllt wird. Es zeigt sich sodann, dass sich ς in eine nach positiven

Potenzen von x, y fortschreitende Potenzreihe entwickeln lässt, die innerhalb eines gewissen Bereiches convergiert; dasselbe gilt daher auch für $\varsigma_1 \dots \varsigma_n$ als Functionen von $x, x_1 \dots x_r$. Damit ist dann auch zugleich die Convergenz der Lösungen des Systemes (61) für einen gewissen Bereich bewiesen. Bevor wir zur Diff. Gl. (58) zurückkehren wollen wir uns noch von einigen beschränkenden Voraussetzungen frei machen.
Wir hatten angenommen, dass sämtliche Functionen $\varphi_{\lambda 0}(x_1 \dots x_r)$ für $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ verschwinden. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, sondern die Werte

$$\varphi_{\lambda 0}(0, 0 \dots 0) = \bar{\varphi}_{\lambda 0}$$

seien sämtlich oder zum Teil von Null verschiedene Constanten, so setzen wir

$$z_1 = \bar{\varphi}_{10} + z_1' \quad \dots\dots\dots \quad z_n = \bar{\varphi}_{n0} + z_n'$$

und erhalten alsdann für $z_1' \dots z_n'$ ein System von Diff. Gl-en von der Form (61). Allerdings setzt diese Transformation voraus, dass die Grössen $\bar{\varphi}_{10} \dots \bar{\varphi}_{n0}$ im Convergenzbereich der Functionen $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ liegen. – Von Wichtigkeit

ist es auch, dass man die Homogeneität der Gl-en (61) aufgeben kann. Denn wenn diese Gl-en noch ein Glied

$$G^{(\lambda)}_{\rho 0}(z_1 \cdots z_n)$$

enthalten, so können wir sie auf die Form (61) dadurch bringen, dass die Anzahl der zu bestimmenden Functionen um eine Einheit vergrössert wird. Wir nehmen eine Function hinzu, welche etwa durch die Gl.

$$z_0 = x_1$$

definiert werden kann, und können sodann die Functionen $G^{(\lambda)}_{\rho 0}$ in jeder Gl. mit $\frac{\partial z_0}{\partial x_1} = 1$ multipliciert denken, während die Multiplication mit den anderen Functionen $G^{(\lambda)}_{\rho\nu}$ wegen $\frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial z_0}{\partial x_r} = 0$ keinen Beitrag liefert. Zu dem System der n Gl-en ist die (n+1)te

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = 0$$

hinzuzunehmen, wobei die Nebenbedingung durch die Definitionsgleichung

$$z_0 = x_1$$

geliefert wird.

Um jetzt die Anwendung auf die Ausgangsgleichung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

zu machen, so haben wir bewiesen, dass sie formell durch den Ansatz

$$z = \varphi(x\, y \,|\, a\, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(y \,|\, b) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

befriedigt werden kann, in welchem sämtliche nach positiven ganzen Potenzen von $y-b$ fortschreitenden Potenzreihen φ_ν für $\nu > 1$ aus den Coefficienten der willkürlich anzunehmenden Potenzreihen φ_0, φ_1 berechnet werden können. Wenn

$$u = x-a, \quad v = y-b$$

gesetzt wird, so geht die nach der Voraussetzung identisch erfüllte Gleichung

$$F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

über in

$$F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right) = 0.$$

Die Frage der Convergenz der Function φ wird nun dadurch auf die der Convergenz der Lösung eines Systemes von der

Form (61) zurückgeführt, dass die in der Diff. Gl. $F=0$ vorkommenden Ableitungen und die Integralfunction selbst als Unbekannte aufgefasst werden. Wir setzen also

$$\varphi = z_1, \ \frac{\partial\varphi}{\partial u} = z_2, \ \frac{\partial\varphi}{\partial v} = z_3, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = z_4, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} = z_5, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = z_6$$

und erhalten aus diesen Definitionsgleichungen unter Bevorzugung von u:

65. $$\frac{\partial z_1}{\partial u} = z_2, \ \frac{\partial z_2}{\partial u} = z_4 \quad \frac{\partial z_3}{\partial u} = z_5 \quad \frac{\partial z_5}{\partial u} = \frac{\partial z_4}{\partial v} \quad \frac{\partial z_6}{\partial u} = \frac{\partial z_5}{\partial v},$$

Gl~en, welche schon die Form der Gl~en (61) haben; es kommt aber noch darauf an, für $\frac{\partial z_4}{\partial u}$ eine Gl. aufzustellen. Durch Differentiation der Identität

$$F(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = 0$$

folgt aber:

$$F'(x) + F'(z_1)\frac{\partial z}{\partial u} + F'(z_2)\frac{\partial z_2}{\partial u} + \cdots\cdots + F'(z_6)\frac{\partial z_6}{\partial u} = 0$$

oder mit Benutzung von (61):

65^a $$\frac{\partial z_4}{\partial u} = -\frac{F'(x)}{F'(z_4)} - \frac{F'(z_1)}{F'(z_4)} z_2 - \frac{F'(z_2)}{F'(z_4)} z_4 - \frac{F'(z_3)}{F'(z_4)} z_5 - \frac{F'(z_5)}{F'(z_4)}\frac{\partial z_4}{\partial v} - \frac{F'(z_6)}{F'(z_4)}\frac{\partial z_5}{\partial v}.$$

Jedoch hat diese Gl. noch nicht die Form der Gl~en (61), weil in ihren Coefficienten noch die unabhängigen Variabeln $x = u + a$, $y = v + b$

vorkommen. Diesem Mangel wird aber sofort abgeholfen, wenn $x = z_7$ $y = z_8$ gesetzt wird und zu (65), (65^a) als siebente und achte Gl: die Gl-en

$$\frac{\partial z_7}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial z_8}{\partial u} = 0 \tag{65b}$$

hinzugenommen werden, die bei passender Wahl der Nebenbedingungen mit $x-a=u$, $y-b=v$ identisch sind.

Jetzt haben wir ein System von 8 Diff. Gl-en dessen Lösungen $z_1, z_2 \cdots z_8$ als Potenzreihen der unabhängigen Variabeln dargestellt werden können, welche innerhalb eines bestimmten Bereiches convergieren, und da dies auch für $z_1 = z = \varphi$ gilt, so ist der Beweis erbracht.

Aus dem Verfahren hat sich ergeben, dass in der Darstellung von z die Functionen φ_0, φ_1 willkürlich angenommen werden können. Freilich gilt dieser Satz nur im allgemeinen. Denn da die Form der Coefficienten $G_{\rho\nu}^{(\lambda)}$ der Gl-en (65) (65^a) in bestimmter Weise von $F=0$ abhängt, so ist es möglich, dass gewisse der gemachte

Voraussetzungen nicht bestehen.
Die Potenzentwicklung würde z. B. dann nicht möglich sein, wenn $F'(z_0)$ für die Anfangswerte verschwindet. Jedenfalls aber können wir behaupten, dass, wenn specielle Formen der Diff. Gl. und der willkürlichen Functionen φ_0, φ_1 ausgeschlossen werden, immer eine Lösung der Diff. Gl. existiert, welche innerhalb eines gewissen Bereiches in eine nach positiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreitende convergente Potenzreihe entwickelt werden kann.

Capitel 7.

Man hat neuerdings die Lösung der Diff. Gl. F=0, deren Existenz auf diesem Wege bewiesen ist, als das allgemeine Integral bezeichnet. Eine Verständigung über diesen Begriff ist notwendig, wenn es nicht möglich ist, das Integrationsproblem auf gewöhnliche Diff. Gl'en zurückzuführen, oder wenn diese Möglichkeit nicht von vornherein feststeht. Ampère nennt die Lösung einer partiellen Diff. Gl. n^{ter} Ordnung allgemein, wenn eine Differentiation dieser Lösung bis zu einer beliebigen, z. B. der $(n+m)^{ten}$ Ordnung, zu keinen anderen Relationen unter den Variabeln und den vorkommenden Ableitungen führt als eine n-malige Differentiation der vorgelegten Diff. Gl. n^{ter} Ordnung. Vom rein logischen Gesichtspunkte aus ist diese Definition der ersteren — (welche verlangt, dass das allgemeine Integral einer Diff. Gl. n^{ter} Ordnung n willkürliche Functionen enthalte) — vorzuziehen; aber man kann das Integrations

problem nicht in diesem Sinne angreifen, während für den ersteren Fall die Lösung wenigstens innerhalb eines gewissen endlichen Bereiches mit Hülfe von Potenzreihen dargestellt werden kann, und ferner eignet sich die Ampère'sche Definition sehr wenig zur Berücksichtigung der für Theorie und Anwendungen wichtigen Nebenbedingungen. Gleichwohl kann man sie mit Erfolg dazu benutzen, um eine Einsicht in die Natur des Integrales und der darin auftretenden willkürlichen Functionen zu erhalten. Die $(n+m)$malige Differentiation des Integrales ergiebt

$$1+2+\dots+(n+m+1)=\tfrac{1}{2}(n+m+2)(n+m+3)$$

Relationen, die n-malige Differentiation der Diff. Gl. ergiebt

$$1+2+\dots+n+1=\tfrac{1}{2}(n+2)(n+3)$$

Relationen zwischen x, y, z und den Ableitungen. Wenn nun die gegebene functionale Beziehung das allgemeine Integral darstellen soll, so müssen die beiden Systeme dieser Relationen gleichbedeutend sein, und

dies kann nur dadurch geschehen, dass in dem ersten Systeme eine gewisse Anzahl willkürlicher Functionen aufheben und dass das Ergebnis der Elimination dieser Functionen oder Constanten mit dem zweiten Systeme übereinstimmt. Es müssen daher mindes[tens]

$\frac{1}{2}(n+m+2)(n+m+3) - \frac{1}{2}(n+2)(n+3) = nm + \frac{1}{2}m(m+5)$

willkürliche Grössen in dem Ausdrucke des allgemeinen Ampère'schen Integrales enthalten sein. Da nun n eine beliebige ganze Zahl ist, so muss die Anzahl der vorkommenden willkürlichen Grössen mit der Anzahl der Differentiationen wachsen – ein charakteristischer Unterschied zwischen den partiellen und den gewöhnlichen Diff. Gl'en. Es fragt sich, wie sich diese Forderung erfüllen lässt.

Indem wir uns hinfort wieder auf den Fall m=2 beschränken, bemerken wir zunäch[st] dass die Annahme eines Integrales, wie es durch den Existenzbeweis geliefert wird, insofern nicht der Forderung entspricht, als das Integral zwei willkürliche Function[en]

$\varphi_0(y\,|\,b)$, $\varphi_1(y\,|\,b)$ enthält, deren Coefficienten als unendlich viele willkürliche Grössen zu betrachten sind; doch können wir, wenn wir wollen, auch ein solches Integral als in der verlangten Form enthalten denken, falls wir unser Augenmerk auf die Functionen φ_0, φ_1 selbst richten. Aus solchen willkürlichen Functionen entstehen nämlich, wie mehrfach gezeigt, durch Differentiation im allgemeinen neue Grössen, welche, solange die Functionen beliebig bleiben, sich nicht vereinfachen lassen, sondern als neue unabhängige Veränderlichen betrachtet werden können. Als Beispiel für den einfacheren Fall möge die Diff. Gl.

$$t - m^2 r = 0$$

dienen. Das allgemeine Integral dieser Diff. Gl. dessen Allgemeinheit nach der Theorie der gewöhnlichen Diff. Gl-en feststeht und welches lautet:

$$z = \varphi(x+my) + \psi(x-my),$$

erscheint „in geschlossener Form" weil φ und ψ nicht Potenzreihen zu sein brauchen

sondern nur gewissen Bedingungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit genügen müssen.

Das Auftreten der willkürlichen Function φ, ψ bewirkt, wie gefordert wird, dass bei der Differentiation die Anzahl der willkürlichen Functionen wächst; denn auch die in

$$p = \varphi' + \psi', \quad q = m(\varphi' - \psi'), \quad r = \varphi'' + \psi'', \quad t = m^2(\varphi'' + \psi'')$$

auftretenden Functionen $\varphi', \psi', \varphi'', \psi''$ sind willkürlich. Es seien $\alpha, \beta \dots$ die Argumente der überhaupt auftretenden willkürlichen Functionen, und es mögen x, y, z dargestellt werden durch die Formeln:

66. $$x = f_1(\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha) \dots \beta, \psi(\beta) \dots), \quad y = f_2(\dots), \quad z = f_3(\dots)$$

Dabei machen wir die Annahme, dass die Elimination von α, β und der willkürlichen Functionen zu <u>einer</u> partiellen Diff. Gl. führt.

Für die Diff. Gl. $t - m^2 r = 0$ haben, wenn $x + my = \alpha$, $x - my = \beta$ gesetzt wird, vorstehende Gl'en die Fo[rm]

$$x = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad y = \tfrac{1}{2m}(\alpha - \beta), \quad z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta).$$

Für die Diff. Gl. $r = 0$, deren allgemeines Integral

$$z = x\,\varphi(y) + \psi(y)$$

ist, ergiebt sich

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \alpha \cdot \varphi(\beta) + \psi(\beta).$$

In diesem Beispiele ist ferner:

$$p = \varphi(y), \quad q = x\varphi' + \psi', \quad r = 0, \quad s = \varphi', \quad t = x\varphi'' + \psi''.$$

Ampère bezeichnet nun einen Ausdruck $\mathfrak{A}$, welcher die Ableitungen derselben willkürlichen Functionen oder einiger der willkürlichen Functionen eines Ausdruckes $\mathfrak{B}$ enthält, als dem Ausdrucke $\mathfrak{B}$ homogen, im entgegengesetzten Falle als dem Ausdrucke $\mathfrak{B}$ heterogen. Daher ist z. B. für die Diff. Gl. $r = 0$ p dem Integrale z homogen, q ihm heterogen, q und s sind untereinander homogen, t ist allen anderen Ableitungen heterogen; für die Diff. Gl. $t - m^2 r = 0$ sind p und q untereinander homogen und dem Integrale heterogen, und ebenso die Ableitungen zweiter Ordnung r, s, t.

Von diesen Festsetzungen können wir auf die Bestimmung der Argumente der willkürlichen Functionen einen Schluss machen und zugleich die in der Theorie der Charakteristiken angewandte Methode der Zerlegung der Diff. Gl. in zwei Diff. Gl'en rechtfertigen.

Es soll vorausgesetzt werden, dass wenigstens eines der Argumente α, β eine Function von x und y ist; es sei z. B.

$$\alpha = f(x,y).$$

Wir nehmen alsdann α und x als unabhängig Veränderlichen an, differentiieren nach x und erhalten, indem wir die partiellen Ableitung dann ausschreiben, wenn α neben x als unabhängige Veränderliche betrachtet wird:

$$0 = f_{10} + f_{01} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Wenn nun auf irgend einem Wege $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden ist, so stellt diese Gl. eine Diff. Gl zur Bestimmung von α dar. Es zeigt sich nun, dass man für diese Grösse aus der Diff.

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

selbst eine Bestimmung herleiten kann. Wir denken uns z als Function der unabhängigen Veränderlichen x, y ermittelt und in die Diff. Gl. eingesetzt, sodass diese identis erfüllt ist, sodann unter Anwendung der Bezeichnungen

$$r = z_{20}, \quad s = z_{11}, \quad t = z_{02}$$

die Gl. $(n-2)$ mal nach y differentiiert:

$$\frac{\partial F}{\partial r} z_{2,n-2} + \frac{\partial F}{\partial s} z_{1,n-1} + \frac{\partial F}{\partial t} z_{0,n} + W = 0,$$

wobei W nur Ableitungen niedrigerer als der n^{ten} Ordnung enthält. Diese Gl. geht unter Beachtung der aus

$$\frac{\partial z_{0,n-1}}{\partial x} = z_{1,n-1} + z_{0,n}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_{1,n-2}}{\partial x} = z_{2,n-2} + z_{1,n-1}\frac{\partial y}{\partial x}$$

folgenden Relationen

$$z_{1,n-1} = \frac{\partial z_{0,n-1}}{\partial x} - z_{0,n}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad z_{2,n-2} = \frac{\partial z_{1,n-2}}{\partial x} - \frac{\partial z_{0,n-1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + z_{0,n}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

über in:

$$67. \quad z_{0,n}\left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) + W + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial z_{0,n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial z_{1,n-2}}{\partial x} - \frac{\partial z_{0,n-1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

Die Untersuchung läuft jetzt darauf hinaus, zu beweisen, dass der Coefficient von $z_{0,n}$ verschwinden muss, sodass die vorgelegte Diff. Gl. in zwei zerfällt worden ist, eine Annahme, welche oben S. 277 aus Zweckmässigkeitsgründen durch geeignete Bestimmung der Function α gemacht wurde.

Da die Anzahl $n-2$ der Differentiationen beliebig ist, so können wir annehmen, dass $z_{0,n}$ dem Integrale, wenn dieses als das allge-

meine vorausgesetzt wird, homogen ist, weil das Ampère-sche allgemeine Integral eine mit der Anzahl der Differentiationen wachsende Zahl willkürlicher Grössen mit sich führen muss. Es sei $z_{\lambda\mu}$ die Ableitung irgend einer Ordnung von z; wir betrachten α neben x als unabhängige variable und erhalten aus $\frac{\partial z_{\lambda\mu}}{\partial\alpha} = z_{\lambda,\mu+1}\frac{\partial y}{\partial\alpha}$:

$$z_{\lambda,\mu+1} = \frac{\partial z_{\lambda\mu}}{\partial\alpha} : \frac{\partial y}{\partial\alpha}.$$

In den Integralgl~en (66) möge eine willkürliche Function $\varphi(\alpha)$ samt ihren l ersten Ableitungen $\varphi'(\alpha) \dots \varphi^{(l)}(\alpha)$ vorkommen, sodass in $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$ die Grösse $\varphi^{(l+1)}(\alpha)$ auftreten kann. Die Grösse $z_{\lambda\mu}$, welche dem Integrale heterogen sein soll, muss $\varphi^{(l+1)}(\alpha)$ enthalten, und daher kommt in $\frac{\partial z_{\lambda\mu}}{\partial\alpha}$, also auch in $z_{\lambda,\mu+1}$ die Ableitung $\varphi^{(l+2)}(\alpha)$ vor, eine Grösse, welche in den niedrigeren Ableitungen von z nicht vorkommen kann. Setzen wir jetzt $\lambda=0$, $\mu=n-1$ und bemerken noch, dass eine Differentiation von $z_{0,n-1}$ in Bezug auf x natürlich keine neue Function des Argumentes α hervorbringen kann, so

ergiebt sich, dass die Gl. (67) nur bestehen kann, wenn der Coefficient von $z_{0,n}$ gleich Null gesetzt wird.

Dieser Beweis bedarf aber noch einer Ergänzung. Es könnte der Einwand gemacht werden, dass, wenn auch die Ableitungen $(n-1)$ter Ordnung dem Integrale heterogen sind, also mindestens $\varphi^{(k+1)}(\alpha)$ enthalten, doch gerade $z_{0,n-1}$ dem Integrale homogen sein könnte, oder allgemeiner: es könnten in denjenigen Ableitungen $(n-1)$ter Ordnung welche in W und den folgenden Gliedern der Gl. (67) enthalten sind, Ableitungen von höherer Ordnung als $\varphi^{(k+1)}(\alpha)$ aufheben; damit dann die in $z_{0,n}$ vorkommende Grösse $\varphi^{(k+2)}(\alpha)$ sich weghebe, wäre nicht notwendig, dass der Coefficient von $z_{0,n}$ verschwindet. Um die Unhaltbarkeit dieses Einwurfes darzuthun, wollen wir beweisen, dass falls eine Ableitung $(\lambda+\mu)$ter Ordnung von z, $z_{\lambda,\mu}$, die willkürliche Function $\varphi^{(k+1)}(\alpha)$ enthält, diese Function in sämtlichen Ableitungen $(\lambda+\mu)$ter Ordnung auftritt; dabei

soll $z_{\lambda\mu}$ dem Integrale sowie sämtlichen Ablei-
ungen niedrigerer Ordnung heterogen sein.
Wir bilden unter der Voraussetzung, dass
x, α die unabhängigen Variabeln sind,

$$\frac{\partial z_{\lambda-1,\mu}}{\partial x} = z_{\lambda,\mu} + z_{\lambda-1,\mu+1}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_{\lambda,\mu-1}}{\partial x} = z_{\lambda+1,\mu-1} + z_{\lambda,\mu}\frac{\partial y}{\partial x}$$

woraus folgt:

$$68. \quad z_{\lambda-1,\mu+1} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}\left(\frac{\partial z_{\lambda-1,\mu}}{\partial x} - z_{\lambda\mu}\right), \quad z_{\lambda+1,\mu-1} = \frac{\partial z_{\lambda,\mu-1}}{\partial x} - z_{\lambda,\mu}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Die in diesen Gl'en zu machende Voraus-
setzung, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ weder 0 noch ∞ ist, ist erfüllt
denn aus der S. 358 gemachten Annahme,
dass α eine Function von x und y ist, folgt
dass in der Gleichung

$$0 = f_{10} + f_{01}\frac{\partial y}{\partial x}$$

weder f_{10} noch f_{01} verschwindet, also $\frac{\partial y}{\partial x}$ weder
0 noch ∞ ist. Aus (68) folgt nun, dass auch
die an $z_{\lambda\mu}$ angrenzenden Ableitungen
$z_{\lambda-1,\mu+1}, z_{\lambda+1,\mu-1}$ die willkürliche Function $\varphi^{(\nu-1)}(\alpha)$
enthalten. Da dieser Schluss sich fortsetzen
lässt, so ergiebt sich unter der über α
gemachten Voraussetzung, dass alle Ableit-
ungen $(\lambda+\mu)$ter Ordnung jene Function enthalten

Falls also einige Ableitungen $(n-1)$ter Ordnung die Function $\varphi^{(\ell+\ell')}(\alpha)$ enthalten, so kommt diese Grösse auch in $z_{0\,n-1}$ vor, und es tritt daher in z_{0n} die Function $\varphi^{(\ell+\ell'+1)}(\alpha)$ auf, welche bewirkt, dass der Coefficient von z_{0n} verschwinden muss. – Auf diese Weise ergiebt sich für α und β ein System von zwei partiellen Diff. Gl~en.

Der Fall, dass α eine Function von x oder von y allein ist, erledigt sich auf einfache Weise.

Da die quadratische Gl. für $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

deren Wurzeln, in die Gl.

$$0 = f_{10} + f_{01}\frac{\partial y}{\partial x}$$

eingesetzt, die Grössen α, β bestimmen, in ihren Coefficienten die Ableitungen von z bis zur zweiten Ordnung enthalten, so ist es thatsächlich im allgemeinen nicht möglich, die partiellen Diff. Gl~en für die Functionen f wirklich zur Bestimmung dieser Functionen zu benutzen.

Man kann auch den Satz beweisen, dass eine

Diff. Gl. zweiter Ordnung mit n unabhängigen veränderlichen in ihrem im Ampère'sch[en]
Sinne allgemeinen Integrale n willkürlich[e]
Functionen enthält.
Die im allgemeinen Ampère'schen Integra[le]
auftretenden willkürlichen Functionen
können ausser mit dem Zeichen der Different-
iation auch mit dem der Integration einge-
führt werden, und es genügt dann eine
blosse Veränderung der Bezeichnung, um
die Integrale wegzuschaffen.
Von solchen Quadraturen wesentlich
verschieden sind die Integrale, welche unte[r]
dem Integralzeichen ausser dem Parameter,
in Bezug auf welchen integriert wird,
noch die Grössen x, y selbst enthalten.
So ist als Integral der Gl. $r = q$ der Ausdruck

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2v\sqrt{y})\, dv$$

hergeleitet worden. Ein solches Integral
bezeichnet Ampère als „partielles Integral";
tritt ein solches in den Ausdruck von x, y, z
ein, so verlieren die vorstehenden Untersuch-
ungen ihre Bedeutung, und daher hat Ampère

die Diff. Gl.en, welche ein Integral der Form (66) zulassen, als Diff. Gl.en der ersten Klasse bezeichnet. Allein abgesehen davon, dass wir nicht in der Lage sind, von vornherein zu beurteilen, ob eine gegebene Diff. Gl. der ersten Ampère'schen Klasse angehört, so ist eine solche Einteilung aus dem Grunde nicht zweckmässig, weil durch sie Diff. Gl.en von einander getrennt werden, die wegen ihrer Form naturgemäss zusammengehören, aber teils ein partielles Integral, teils einen Ansatz von der Form (66) als Lösung zulassen.

Die Ampère'sche Theorie lässt in mehr als einer Hinsicht eine Verallgemeinerung zu. Zunächst kann sie ohne weiteres auf Diff. Gl.en beliebiger Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ausgedehnt werden. Ist z. B. die Diff. Gl. dritter Ordnung

$$F(x\, y, z, p\, q, r \dots z_{30}, z_{21}, z_{12}, z_{03}) = 0$$

zur Integration vorgelegt, so ist sie $(n-3)$ mal nach y zu differentiieren und sodann nach Anwendung der oben benutzten Transformation der Coefficient von z_{0n} gleich Null

zu setzen. Die entstehende cubische Gleichung für $\frac{\partial y}{\partial x}$ führt zu Diff. Gl-en, welche den Diff. Gl der Charakteristiken für $n=2$ entsprechen.
Eine andere Verallgemeinerung dieser Theorie oder der Theorie der Charakteristiken selbst ist von Darboux gegeben worden[x]. Der Grundgedanke besteht, wenn wir uns auf $n=2$ besch – (was wir nach dem heutigen Stande der Theorie thun mü darin, ausser den Differentialquotienten p, q, r, s, t, die der Natur der Aufgabe nach allein bei der Lösung vorkommen, noch die Ableitungen höherer Ordnung bis zu einer gewissen Höhe hinzuzunehmen und zu untersuchen, ob das so erhaltene Gleichungssystem, auch wenn es mehr Unbekannte enthält als das System der Charakteristiken, doch leichter zu behandeln ist als dieses.

Bei Gelegenheit des Existenzbeweises haben wir ein System von n partiellen Diff. Gl-en erster Ordnung benutzt, durch welches ebensoviele Functionen bestimmt werden sollte Die Diff. Gl-en der Charakteristiken haben wir andererseits auf eine Diff. Gl. erster Ordnu

[x] Annales scientifiques de l'École normale sup., t VII, 1870.

mit 5 unabhängigen Variabeln zurückgeführt. Man kann nun bei der Verallgemeinerung entweder die Bedingung fallen lassen, dass das System von der ersten Ordnung sei oder auch die Bedingung, dass die Anzahl der zu bestimmenden Functionen gleich der Anzahl der Diff. Gl-en oder $=1$ sei. Man kann also ganz allgemein fragen, wann sich m Functionen aus n simultanen Diff. Gl-en $p$ter Ordnung bestimmen lassen. Über alle diese Fragen ist in neuerer Zeit eine umfassende Litteratur entstanden; insbesondere ist für die Diff. Gl-en zweiter Ordnung das Buch von Goursat nachzusehen.

Eine Integrationsmethode, welche berufen zu sein scheint, die Theorie der partiellen Diff. Gl-en zu fördern, ist von Picard seit 1890 im Journal de Mathématiques sowie in den Comptes rendus entwickelt worden, die Methode der successiven Approximation. Anstatt allgemeiner Erörterungen soll diese Methode an einem Beispiele dargelegt werden, welches Bianchi's Differentialgeometrie entnommen ist:

Das Problem, die Flächen constanten negativen Krümmungsmasses zu bestimmen d.h. die Integration der particellen Diff. Gl.

$$\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2} = -\frac{1}{k^2},$$

wo k eine reelle Constante, reduciert sich im wesentlichen auf die Integration der Diff. Gl.

$$s = \sin z;$$

hierbei sind x, y, z nicht die cartesischen Coordinaten der gesuchten Flächen, sondern Grössen, welche in gewisser Weise mit den Asymptotencurven zusammenhängen. Es wird nun gefordert, eine Lösung der Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z$$

zu bestimmen, die sich für $x=0$ und für $y=0$ auf gegebene Functionen reduciert; es soll also für

$$x=0 \qquad z=\Psi(y),$$

$$y=0 \qquad z=\Phi(x)$$

werden. Aus diesen Nebenbedingungen folgt dass

$$\Phi(0)=\Psi(0)$$

vorauszusetzen ist; ausserdem müssen die Functionen φ und ψ gewissen Bedingungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit genügen

die aus dem Verlaufe der Untersuchung hervorgehen werden, sonst aber sind sie vollkommen willkürlich. Es wird nun zunächst eine Function z_1 bestimmt, welche der elementaren Diff. Gl.

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = 0$$

sowie den Nebenbedingungen genügt; offenbar ist

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$$

zu setzen. Sodann soll eine ebenfalls den Nebenbedingungen genügende Function z_2 aus der Diff. Gl. $\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = \sin z_1$

bestimmt werden. Die rechte Seite dieser Gl. ist eine bekannte Function, und es folgt:

$$\frac{\partial z_2}{\partial y} = \int_0^x \sin z_1\, dx + \bar{\psi}(y)$$

$$z_2 = \int_0^y dy \int_0^x \sin z_1\, dx + \psi_1(y) + \varphi_1(x).$$

Hieraus ergiebt sich der Forderung gemäss für:

$$x = 0: \quad \psi(y) = \psi_1(y) + \varphi_1(0),$$

$$y = 0: \quad \varphi(x) = \psi_1(0) + \varphi_1(x),$$

also wird

$$\varphi_1(x) + \psi_1(y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi_1(0) - \psi_1(0) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) = z_1,$$

$$z_2 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \sin z_1\, dx\, dy.$$

In ganz analoger Weise ergiebt sich aus den Gl'en

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x \partial y} = \sin z_2 \;\cdots\cdots\; \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \sin z_{n-1} \cdots\cdots$$

die Reihe der folgenden, sämtlich den Anfang-bedingungen genügenden Functionen:

$$z_3 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \sin z_2 \, dx\, dy \;\cdots\cdots\; z_n = z_1 + \int_0^x\int_0^y \sin z_{n-1}\, dx\, dy \cdots$$

Es ist jetzt nachzuweisen, dass z_n für $n = \infty$ sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert und dass dieser Grenzwert dann die vorgelegte Diff. Gl. befriedigt. Zum Beweise setzen wir die unendliche Reihe

$$Z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) + \cdots\cdots$$

an und haben dann, falls Z einen Grenzwert ha[t]

$$Z = \lim_{n=\infty} z_n .$$

Nun ist, wenn $|x| = \xi$, $|y| = \eta$ gesetzt wird:

$$|z_2 - z_1| = \left|\int_0^x\int_0^y \sin z_1 \, dx\, dy\right| \leqq \int_0^\xi \int_0^\eta |\sin z_1| \, d\xi\, d\eta$$

$$< \int_0^\xi \int_0^\eta d\xi\, d\eta < \xi\eta ;$$

ferner ist

$$z_3 - z_2 = \int_0^x\int_0^y (\sin z_2 - \sin z_1)\, dx\, dy = \int_0^x\int_0^y 2\cos\tfrac{1}{2}(z_2+z_1)\sin\tfrac{1}{2}(z_2-z_1) \ldots$$

folglich, da $|\cos\frac{1}{2}(z_2 + z_1)| \leqq 1$ ist:

$$|z_3 - z_2| < \int_0^\xi \int_0^\eta 2\,|\sin\tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)|\, d\xi\, d\eta .$$

Nun ist für jedes reelle Argument α

$$|\sin\alpha| < \alpha ,$$

also haben wir unter Berücksichtigung von $|z_2 - z_1| < \xi\eta$:

$$|z_3 - z_2| < \int_0^\xi \int_0^\eta \xi\eta \, d\xi \, d\eta < \frac{1}{2^2}(\xi\eta)^2.$$

Ebenso ergiebt sich

$$|z_4 - z_3| < \frac{1}{(3!)^2}(\xi\eta)^3.$$

Angenommen, es sei

$$|z_n - z_{n-1}| < \frac{1}{((n-1)!)^2}(\xi\eta)^{n-1},$$

so folgt

$$|z_{n+1} - z_n| < \int_0^\xi \int_0^\eta 2\,|\sin \tfrac{1}{2}(z_n - z_{n-1})\, d\xi \, d\eta < \frac{(\xi\eta)^n}{(n!)^2},$$

womit das allgemeine Glied der Reihe Z mit einem grösseren verglichen ist. Die Reihe

$$\xi\eta + \frac{(\xi\eta)^2}{2!} + \frac{(\xi\eta)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(\xi\eta)^{n-1}}{(n-1!)^2} + \cdots\cdots$$

convergiert aber unbedingt für alle im Endlichen gelegenen Wertepaare ξ, η; es muss demnach auch die Grösse Z eine endliche Summe haben und zwar lässt sie sich als eine Reihe in Bezug auf x und y darstellen, welche für alle Wertepaare x, y eines beliebigen endlichen Bereiches gleichmässig convergiert.

Um endlich zu entscheiden, ob Z der

vorgelegten Diff. Gl. $s = \sin z$ genügt, bilden wi

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = \sin z_1,$$

$$\frac{\partial^2 (z_3 - z_2)}{\partial x \partial y} = \sin z_2 - \sin z_1,$$

- - - - - - - -

Wir haben also die Reihe

$$\sin z_1 + (\sin z_2 - \sin z_1) + \dots + (\sin z_n - \sin z_{n-1}) + \dots$$

zu betrachten, für welche

$$\lim_{n=\infty} \sin z_n$$

gesetzt werden kann. Nun ist aber $\lim_{n=\infty} z_n = Z$ und daher convergiert die Reihe, weil Z_n endlich ist, und ihre Summe ist $\sin Z$.

Daher ist

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \sin Z.$$

Dass die Nebenbedingungen erfüllt sind, geht aus der Herleitung selbst hervor. Hiermit ist der Existenzbeweis geliefert.

Verzeichniss der behandelten Beispiele, welche in dem Inhaltsverzeichnisse nicht angegeben sind.

10. $pq - z = 0.$ S. 62.

11. $F(z, p, q) = 0.$ — Diejenigen Flächen zu bestimm deren Normalen von der Fläche aus gerechn bis zu einer festen Ebene eine constante Lä haben: $z^2(p^2+q^2+1) = a^2.$ S. 64.

12. $p_1 p_2 p_3 - x_1 x_2 x_3 = 0.$ S. 99.

13. $(x_1 p_2 + x_2 p_1) x_3 + a(p_1 - p_2) p_3 - b = 0.$ S. 101.

14. $$\begin{cases} 2x_2 x_4^2 p_1 + x_3^2 x_4 p_4 - x_3^2 = 0. \\ 2x_2 p_2 - x_4 p_4 - 1 = 0. \\ x_2 x_4^2 p_3 + x_1 x_3 x_4 p_4 - x_1 x_3 = 0. \end{cases}$$ S. 116.

15. $$\begin{cases} p_1 p_3 - x_2 x_4 = 0 \\ p_2 p_4 - x_1 x_3 = 0 \end{cases}$$ S. 126.

16. $p_1 p_2 \cdots p_n - x_1 x_2 \cdots x_n = 0.$ S. 159.

17. $r = c.$ S. 179.

18. $s = c.$ S. 180, S. 267

19. $t - m^2 r = 0.$ S. 185, 242, 268, 271, 294, 299, 355, 35

20. $x^2 r + 2xys + y^2 t = 0.$ S. 187, 292.

21. $s + \frac{\beta}{y} p + \frac{\alpha}{x} q + \frac{\alpha\beta}{xy} = 0.$ S. 192.

22. $s - \frac{p+q}{x+y} = 0.$ S. 198.

23. $r - a^2 t + \frac{mz}{x^2} = 0.$ S. 201.

24. $s - \left(\frac{n(n-1)}{(x+y)^2} - \frac{m(m-1)}{(x-y)^2}\right) z = 0.$ S. 227.

25. Diejenigen Flächen zu bestimmen, für welche eine Schar der Krümmungslinien in parallelen Ebenen liegt: $pqr-(1+p^2)s=0$. S. 263.

26. Die abwickelbaren Flächen (die Flächen vom Krümmungsmasse 0) zu bestimmen:
$rt-s^2=0$. S. 265, 293.

27. $q^2r-2pqs+p^2t=0$. S. 290.

28. $rt-s^2=-a^2$. S. 293.

29. Diejenigen Flächen zu bestimmen, in deren sämtlichen Punkten der eine Hauptkrümmungsradius constant ist:

$(rt-s^2)a^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot a+(p^2+q^2+1)^2=0$. S. 306.

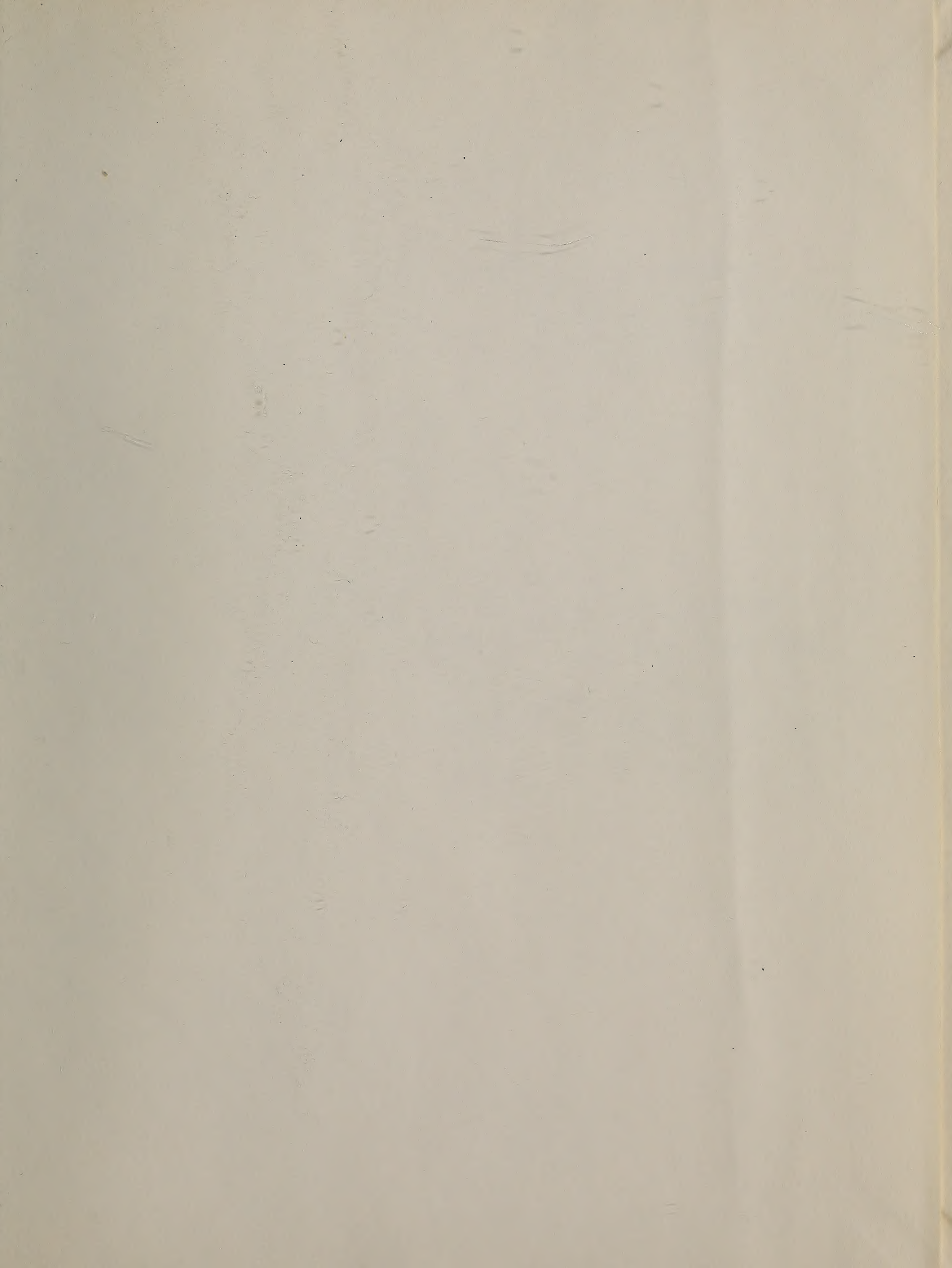
30. $s=e^z$. S. 317.

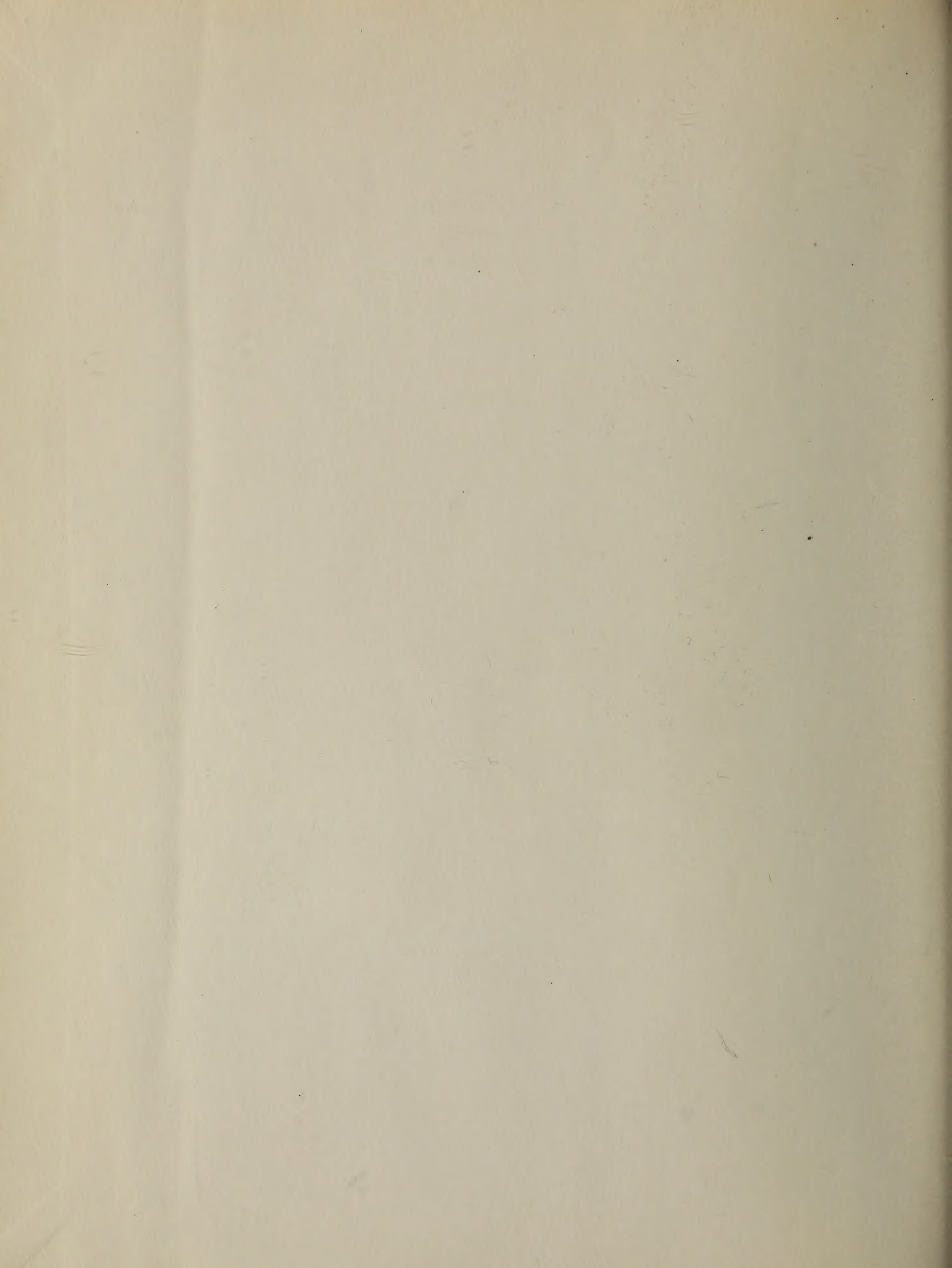
31. $s=\sin z$. S. 368.

3678 1 0









BINDING SECT.

SEP 16 1971

QA 374 K56

Knoblauch, Johannes
Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Physical & Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

